Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 4 Febbraio 2012

FILA 1

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.
Allegare il presente foglio allo scritto.

(1) (**Punti 8**) Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} z^3\,\overline{w}^2 \; - (\sqrt{3} - i) = 0, \\ \overline{z} - w^2 = 0. \end{cases}$$

(2) (**Punti 8**) Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos x^2 \; - \; 1 \; + \; \frac{x^4}{2}}{\sin^2 x \; - \; \log(1 + x^2)}.$$

(3) (**Punti 8**)Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{27\,x - 1} \; - \; \sqrt{8\,x - 1},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(4) (**Punti 8**) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & 1, \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n^2 + a_n}{8}\,(a_n + 2). \end{cases}$$

Risoluzione degli esercizi proposti.

(1) (**Punti 8**) Risolvere il seguente sistema in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} z^3\,\overline{w}^2 \ -(\sqrt{3}-i)=0, \\ \\ \overline{z}-w^2=0. \end{cases}$$

Svolgimento.

Dalla seconda equazione del sistema si ricava

$$\overline{z}=w^2 \iff z=\overline{w}^2 \iff z^3=\overline{w}^6. \tag{1}$$

Sostiuendo nella prima equazione si ottiene

$$\overline{w}^8=\sqrt{3}-i \iff w^8=\sqrt{3}+i.$$

Risolvere questa equazione equivale a determinare le radici ottave del numero complesso $\sqrt{3}+i$. Per fare ció esprimiamo questo numero in forma trigonometrica:

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Applichiamo la formula per il calcolo delle radici ennesime.

$$w_k=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{48}+k\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{48}+k\frac{\pi}{4}\right)\right],\ \ k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7.$$

Sostituendo in (1)

$$\overline{z}_k=w_k^2=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)\right],\ \ k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7.$$

$$z_k=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{47\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{47\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)\right],\ \ k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7.$$

Perché il coniugato del complesso che ha come argomento $\frac{\pi}{24}$ ha come argomento $2\pi-\frac{\pi}{24}=\frac{47}{24}\pi$.
Le soluzioni del sistema sono indefinitiva le coppie $(z_k,\,w_k)$, con $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7$.

(2) (**Punti 8**) Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x^2\ -\ 1\ +\ \frac{x^4}{2}}{\sin^2 x\ -\ \log(1+x^2)}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolvere l'indeterminazione utilizziamo il polinomio di Taylor per ciascuna delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\cos t=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+o(t^4),\ \text{per } t=x^2 \text{ si ha } \cos x^2=1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{24}x^8+o(x^8).$$

$$\sin^2 x=\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^2=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$

$$\log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2),\ \text{per }, t=x^2 \text{ si ha } \log(1+x^2)=x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4).$$

Sostituendo quanto ottenuto nel limite proposto, risulta

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{24}x^8 + o(x^8)}{\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} =$$

(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{24}x^8}{\frac{1}{2}x^4} = 0.$$

(3) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{27\,x - 1} \;-\; \sqrt{8\,x - 1},$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

Il campo di esisienza di f é l'insieme $\{x :\ x \geq \frac{1}{8}\}$. Inoltre si verifica facilmente che, per ogni $x \geq \frac{1}{8}$, $f(x) > 0$.
Andamento agli estremi del C.E.:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left[3\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{1}{27x}} - 2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{8x}}\right] = +\infty.$$

Nel punto $x_0 = \frac{1}{8}$ la funzione é definita e quindi sia ha $f(x_0) = \sqrt{\frac{19}{8}}$. Esistenza di eventuali asintoti all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}\left[3\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{1}{27x}} - 2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{8x}}\right] = 0.$$

Non esistono asintoti per x che tende a $+\infty$.
Calcoliamo la derivata prima e determiniamo gli intervalli di monotonia di f.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{\sqrt{27x-1}} - \frac{8}{\sqrt{8x-1}}\right).$$

Da cui ricaviamo che $f'(x) > 0$ per i valori di x che verificano la diseguaglianza:

$$27\sqrt{8x-1} > 8\sqrt{27x-1} \iff x > \frac{665}{4104}.$$

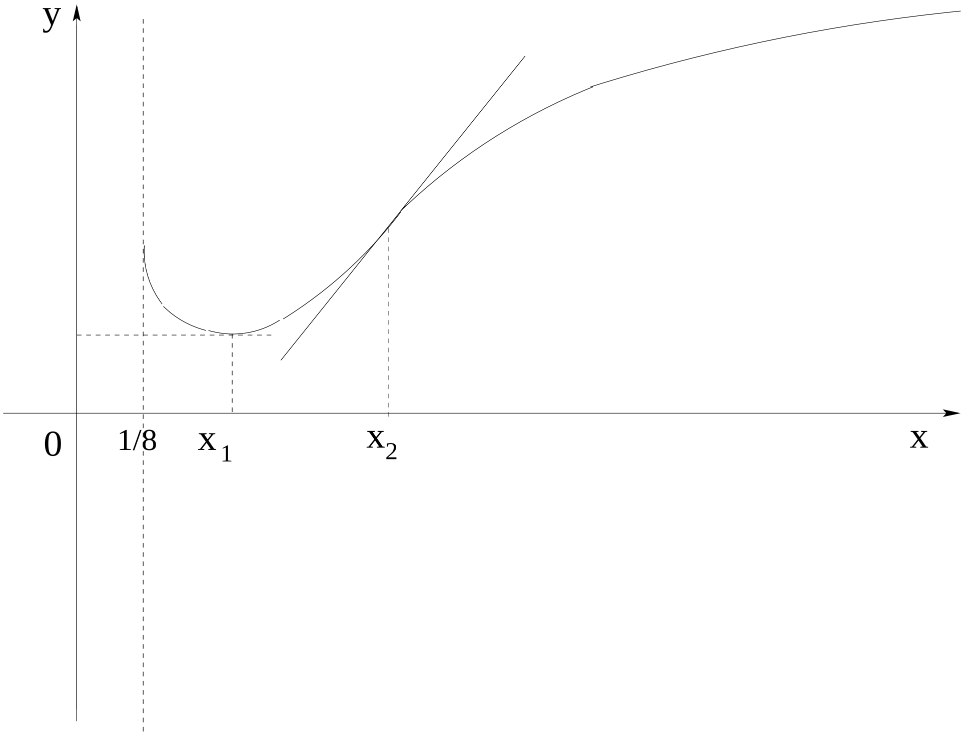
Quindi la funzione risulta decrescente sull'intervallo $[\frac{1}{8}, \frac{665}{4104}]$ e crescente sull'intervallo $[\frac{665}{4104}, +\infty)$. Quindi il punto $x_1 = \frac{665}{4104}$ é punto di minimo relativo che é anche assoluto. Si osservi che $\frac{665}{4104} = \frac{35}{216}$
Calcoliamo la derivata seconda per determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá.

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{729}{\sqrt{(27x-1)^3}} - \frac{64}{\sqrt{(8x-1)^3}}\right).$$

Da questa espressione ricaviamo che $f''(x) > 0$ per i valori di x che verificano la disequazione:

$$729\sqrt{(8x-1)^3} < 64\sqrt{(27x-1)^3} \iff x < \frac{65}{216}.$$

Di conseguenza la funzione risulta convessa nell'intervallo $[\frac{1}{8}, \frac{65}{216}]$ e concava nell'intervallo $[\frac{65}{216}, +\infty)$. Il punto $x_2 = \frac{65}{216}$ é punto di flesso. Possiamo a questo punto tracciare un grafico approssimato della funzione.



(4) (**Punti 8**) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_1 & = & 1, \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n^2 + a_n}{8}\,(a_n + 2). \end{cases}$$

Svolgimento

Dimostriamo che la successione é sempre positiva per induzione. $a_1 = 1 > 0$. Verifichiamo l'induttivitá: $a_n > 0$ implica $a_{n+1} > 0$, perché $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + a_n}{8}\,(a_n + 2) > 0$ e l'espressione al secondo membro risulta positiva in quanto, per l'ipotesi induttiva, tutti i suoi termini sono maggiori di zero.

La successione é monotona decrescente. Procedediamo anche per questa dimostrazione per induzione. Risulta $a_1 = 1 > a_2 = \frac{3}{4}$, mentre l'induttivitá: $a_{n-1} > a_n$ implica che $a_n > a_{n+1}$, segue da

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-1}}{8}\,(a_{n-1} + 2) > a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_n}{8}\,(a_n + 2).$$

Infatti essendo la successione a termini positivi, si ha che da $a_{n-1} > a_n \Longrightarrow a_{n-1}^2 + a_{n-1} > a_n^2 + a_n$ e da $a_{n-1} > a_n \Longrightarrow a_{n-1} + 2 > a_n + 2$ segue $a_{n-1} > a_n \Longrightarrow (a_{n-1}^2 + a_{n-1})(a_{n-1} + 2) > (a_n^2 + a_n)(a_n + 2)$.

In definitiva la successione é monotona decrescente e limitata inferiormente quindi, per il teorema di regolaritá delle successioni monotone risulta che esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Calcoliamo L passando al limite nella successione ricorsiva e risolvendo l'equazione ottenuta in questo modo:

$$L = \frac{L^2 + L}{8}(L + 2).$$

Una soluzione é $L_1 = 0$ le altre sono $L_2 = -\frac{3+\sqrt{33}}{2}$ e $L_3 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

L_2 si scarta perché non é punto di accumulazione per la successione dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n > 0$.

Per lo stesso motivo L_3 non é il limite della successione dato che essa é decrescenta e $L_3 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2} > 1$.

Quindi il limite cercato é $L_1 = 0$.