Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 17 luglio 2012

(1) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x^2 - 2\sin x^2}{(\cos 2x)^2 + 8\cos x^2 - 9}$$

Svolgimento
Consideriamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\sin 2x^2 = 2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + o(x^6),$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6),$$

$$(\cos 2x)^2 = \left[1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right]^2 = 1 - 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 + o(x^4),$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4),$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x^2 - 2\sin x^2}{(\cos 2x)^2 + 8\cos x^2 - 9} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^6 + o(x^6)}{-4x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^6}{-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{4} = 0.$$

(2) Studiare la funzione

$$f(x) = x - \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}, \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento
Campo di esistenza: $[0, 2\Pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$. Determiniamo il comportamento della funzione negli intorni dei punti dove non è definita mediante i seguenti limiti

$$\lim_{\frac{\pi}{2}-} f(x) = -\infty; \ \lim_{\frac{\pi}{2}+} f(x) = +\infty; \ \lim_{\frac{3\pi}{2}-} f(x) = +\infty; \ \lim_{\frac{3\pi}{2}+} f(x) = -\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima per determianare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo.

$$f'(x) = 1 - (\cos x)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\sin^2 x (\cos x)^{-\frac{4}{3}} = \frac{3(\cos x)^{\frac{4}{3}} - 2\cos^2 x - 1}{3(\cos x)^{\frac{4}{3}}}$$

Il denominatore è sempre positivo, mentre per studiare il segno del numeratore consideriamo la funzione

$$g(x) = 3(\cos x)^{\frac{4}{3}} - 2\cos^2 x - 1.$$

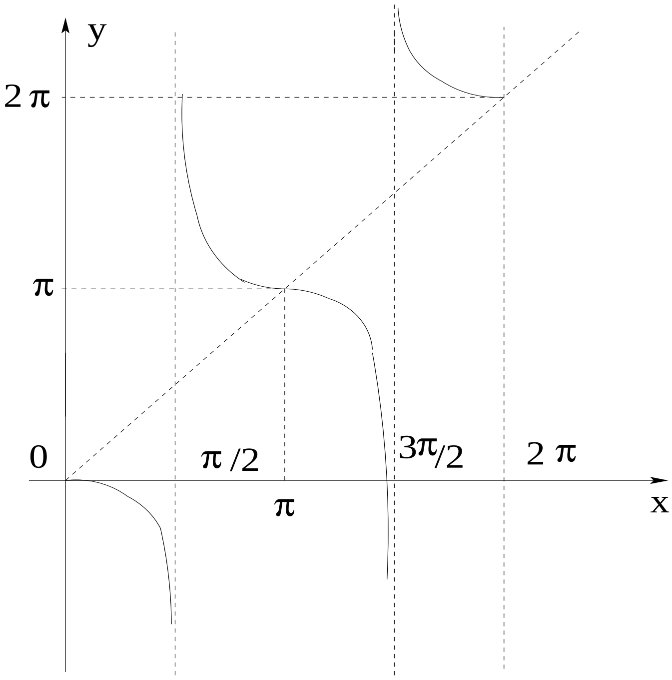
Si ha che

$$g'(x) = -\sin x[4(\cos x)^{\frac{1}{3}} - 4\cos x]$$

Si ha che $g'(x) \leq 0$ per ogni x. Infatti $4(\cos x)^{\frac{1}{3}} - 4\cos x > 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ oppure $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Tenuto conto del segno di $-\sin x$ si ha che $g'(x) < 0$ per per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ oppure $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ e positiva nel complementare. In particolare $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ sono punti di minimo, $g'(x) = 0$ per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ sono punti di massimo. Questo implica che essendo $g(0) = 0$, $g(\pi) = 0$, $g(2\pi) = 0$ si ha $g(x) \leq 0$ per ogni x. Ossia $f'(x)$ è sempre negativa e quindi f è decrescente.
Per stabilire gli intervalli dove la funzione è concava o convessa calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{4}{9}(\sin x)^3(\cos x)^{-\frac{5}{3}}$$

Da cui deduciamo che $f'' > 0$ dove $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$ oppure dove $\sin x > 0$ e $\cos x < 0$. Cioé sugli intervalli $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, dove risulterà f convessa. In maniera analoga si deduce che f è concava sul complementare. In particolare il punto $x = \pi$ è di flesso. Tenuto conto di quanto ottenuto possiamo tracciare il seguente grafico.



(3) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt[3]{e^{4nx} - x - 1}}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

a) dimostrare che, per ogni n, $f_n(x)$ è integrabile su $(0, 1)$;

b) data una costante a tale che $0 < a < 1$, calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^1 f_n(x)\, dx;$$

c) calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Svolgimento

a) Applichiamo il criterio del confronto asintotico nell'intorno del punto $x = 0$ che è l'unico zero del denominatore della funzione. Dallo sviluppo di Taylor dell'esponenziale con punto iniziale $x = 0$ otteniamo

$$e^{4nx} - x - 1 = 4nx + o(nx) - x = x(4n - 1) + o(nx).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{(e^{4nx}-x-1)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{(4nx)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{4n}{4n-1}$$

La funzione data si comporta nell'intorno di $x = 0$ come la funzione armonica $x \to \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ che è integrabile. Quindi anche f_n è integrabile per ogni n.

b) Per poter passare al limite dentro il segno di integrale vediamo se sull'intervallo $(a, 1)$ la successione di funzioni converge uniformemente. A tale scopo calcoliamo la derivata prima.

$$f'n(x) = -\frac{n^2(4ne^{4nx}-1)}{3(e^{4nx}-x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

f'_n risulta negativa su $(0, 1)$, quindi f_n è decrescente su questo intervallo. Queste considerazioni ci permettono di stabilire che per ogni n

$$sup_{[a,1]} f_n(x) = f_n(a) = \frac{n^2}{(e^{4na}-a-1)^{\frac{1}{3}}}.$$

Da cui deduciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} sup_{[a,1]} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(e^{4na}-a-1)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Ossia la successione f_n converge uniformemente a zero, possiamo quindi concludere

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^1 f_n(x)\ dx = \int_a^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ dx = 0.$$

c) Lo stesso ragionamento non è applicabile su $(0, 1)$ dato che puntualmente su questo intervallo la successione tende a zero mentre

$$\sup_{(0,1]} f_n(x) = +\infty.$$

Per determinare il valore del limite minoriamo l'integrale di f_n con l'integrale di una funzione della quale sappiamo calcolare una primitiva. La seguente maggiorazione vale per ogni $x > 0$

$$e^{4nx} - x - 1 < e^{4nx}.$$

Otteniamo in definitiva

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx = +\infty$$

perché per il criterio del confronto si ha

$$\int_0^1 \frac{n^2}{\sqrt[3]{e^{4nx}-x-1}}\ dx > \int_0^1 \frac{n^2}{e^{\frac{4}{3}nx}} = n^2 \left[-\frac{3}{4n} e^{-\frac{4}{3}nx}\right]_0^1 = -\frac{3n}{e^{\frac{4}{3}n}} + \frac{3}{4}n \ \xrightarrow{n\to+\infty}\ +\infty$$