Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 12 giugno 2012

(1) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[\sin 3x + \log(2x+1)]^2 - 25x^2}{e^{3x^2} - \cos 2x - 5x^2}$$

Svolgimento

Sviluppiamo con la formula di Taylor le funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3);$$

$$\log(2x+1) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3);$$

$$[\sin 3x + \log(2x+1)]^2 = \left[5x - \frac{9}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right]^2 = 25x^2 - 20x^3 + o(x^3);$$

$$e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4);$$

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Sostuiamo ottenendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{25x^2 - 20x^3 + o(x^3) - 25x^3}{5x^2 + \frac{23}{6}x^4 + o(x^4) - 5x^2} = \lim_{x\to 0^+} \quad -\frac{120}{23}\ \frac{1}{x} = -\infty.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{8x-2} - \sqrt{27x}$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento.

Il campo di esistenza di f è la semiretta $[\frac{1}{4}, +\infty)$.
Comportamento agli estremi del C. E.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x-2-27x}{\sqrt{8x-2}+\sqrt{27x}} = -\infty.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Esistenza di asintoti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

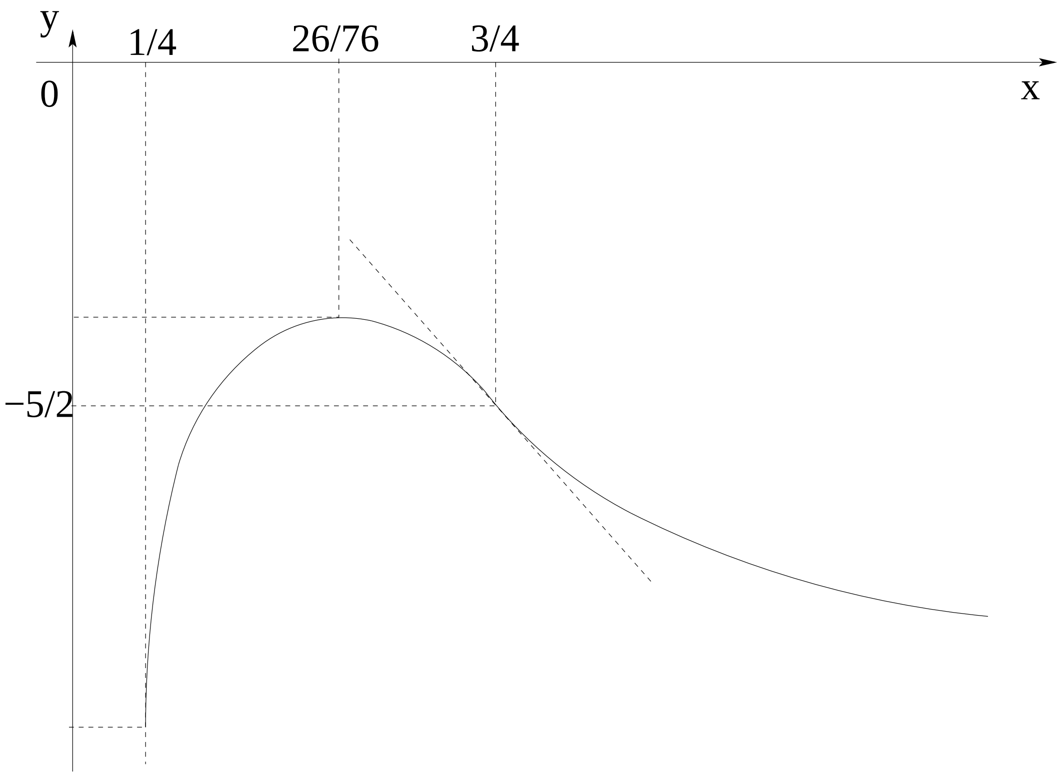
Non esistono asintoti obliqui.
Studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{2}}{4x-1} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

Risulta $f'(x) > 0$ per $\dfrac{1}{4} \leq x < \dfrac{27}{76}$. Quindi f è crescente sull'intervallo $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{27}{76}\right)$ e decrescente su $\left(\dfrac{27}{76}, +\infty\right)$.
Il punto $x_0 = \dfrac{27}{76}$ è punto di massimo.
Studio della derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{(4x-1)^3}} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{x^3}}$$

f'' si annulla nel punto $x_1 = \dfrac{3}{4}$.
$f'' < 0$ su $(\frac{1}{4}, x_1)$ e $f'' > 0$ su $(\frac{1}{4}, +\infty)$.
f è concava su $(\frac{1}{4}, x_1)$ e convessa su $(\frac{1}{4}, +\infty)$. Il punto x_1 è di flesso per f.
Sulla base di quanto ottenuto possiamo tracciare il seguente grafico.



3) Data la famiglia di funzioni

$$f_{a,n}(x) = x^{2n+1}\, e^{-ax^2}, \;\; a > 0, \;\; n \in \mathbb{N},$$

a) Dimostrare che $f_{a,n}$ è integrabile in $(0, +\infty)$.

b) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}\, e^{-ax^2}\, dx$$

in funzione di a e di n.

Svolgimento

a) Fissato n, per x sufficientemente grande, risulta

$$x^{2n+1} < e^{\frac{a}{2}x^2} \iff \frac{x^{2n+1}}{e^{ax^2}} < \frac{1}{e^{\frac{a}{2}x^2}}$$

Essendo la funzione $e^{-\frac{a}{2}x^2}$ integrabile su $(0,+\infty)$, per il teorema del confronto anche $f_{a,n}$ lo è.
Ricordiamo che lntegrabilità di $e^{-\frac{a}{2}x^2}$ segue dal teorema del confronto e dalla maggiorazione

$$e^{-\frac{a}{2}x^2} < e^{-\frac{a}{2}x},$$

su $[1,+\infty)$.
b)
Per $n=0$ si ha, integrando per parti:

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-ax^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2a}.$$

Sia $n>0$.

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+3} e^{-ax^2}\ dx \;=\; \frac{1}{-2a}\int_0^{+\infty} x^{2n+2} x e^{-ax^2}(-2a)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^{2n+2}}{-2a} e^{ax^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} (2n+2) x^{2n+1} e^{-ax^2}\ dx = \frac{n+1}{a}\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2}\ dx.$$

Nello stesso modo

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2}\ dx \;=\frac{n}{a}\int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-ax^2}\ dx =$$

$$\frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^{+\infty} x^{2n-3} e^{-ax^2}\ dx.$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+3} e^{-ax^2}\ dx = \frac{(n+1)n(n-1)}{a^3}\int_0^{+\infty} x^{2n-3} e^{-ax^2}\ dx = \cdots = \int_0^{+\infty} x\, e^{-ax^2}\ dx \;=\; \frac{(n+1)!}{2a^{n+2}}.$$

Quindi possiamo dedurre che

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}\, e^{-ax^2}\ dx \;=\; \frac{n!}{2a^{n+1}}.$$

Questa relazione si può dimostrare per induzione:
Per $n=0$ si ha, integrando per parti:

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-ax^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2a}.$$

Per quanto visto sopra è ovviamente induttiva

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+3} e^{-ax^2}\ dx \;=\; \frac{n+1}{a}\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2}\ dx = \frac{(n+1)!}{2a^{n+2}}$$