Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 6 settembre 2012

1) Studiare la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{1}{3\,\tan^3 x} \;+\; 2x, \quad (0 \;\le\; x \;\le \pi)$$

e tracciare il grafico.

Svolgimento.
Campo di esistenza: $[0,\pi] \setminus \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.
Comportamento agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to \pi-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \pi, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \pi.$$

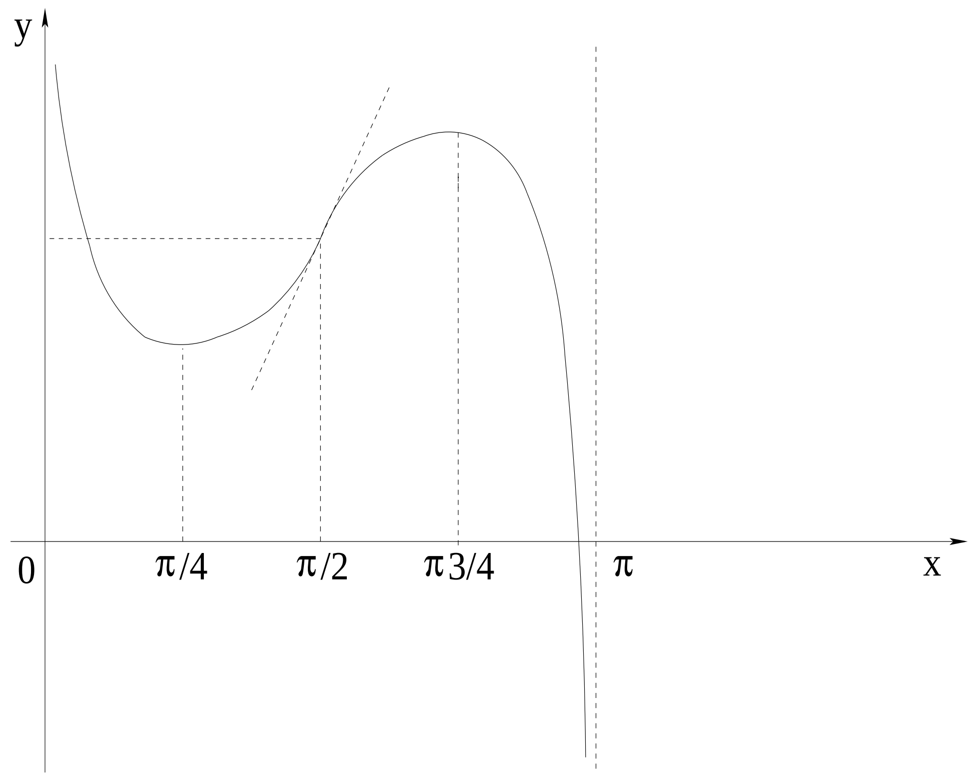
Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) \;=\; -\,\frac{1}{\tan^4\, x}\,(1+\tan^2 x) \;+\; 2 \;=\; -\,\frac{1}{\tan^4 x} \;-\; \frac{1}{\tan^2 x} \;+\; 2 \;=\; \frac{-1-\tan^2 x \;+\; 2\,\tan^4 x}{\tan^4 x}.$$

Il segno di f' è determinato dal numeratore, ponendo $t = \tan^2 x$ ci riconduciamo alla risoluzione della disequazione $2t^2 - t - 1 > 0$. Le radici sono $t_1 = -\frac{1}{2}$ e $t_2 = 1$. L'unica soluzione accettabile, per la posizione fatta, è $t = 1$, ovvero $\tan^2 x = 1$, da cui $\tan x < -1$ oppure $\tan x > 1$. Queste disequazioni, riportate agli angoli nel dominio considerato, forniscono: $f'(x) > 0$ se $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, su questi intervalli la funzione é crescente. Mentre $f'(x) < 0$ se $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$, su questi intervalli la funzione é decrescente.
Calcoliamo la derivata seconda per determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá di f.

$$f''(x) \;=\; (1+\tan^2 x)\left(\frac{4}{\tan^2 x \;+\; 2}\right)\frac{1}{\tan^3 x}.$$

Il segno di f'' é determinato dal segno di $\tan x$. $f''(x) > 0$ se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, su questo interallo la funzione é convessa. $f''(x) < 0$ se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, su questo intervallo la funzione é concava.
Possiamo tracciare il grafico approssimato di f.



2) Studiare la convergenza della serie di potenze.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n \,(e^{\frac{1}{n^2}} - 1).$$

Svolgimento.
Calcoliamo il raggio di convergenza della serie:

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}} = 1.$$

Infatti, per n sufficientemente grande, si ha

$$1 > e^{\frac{1}{n^2}} - 1 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) > \frac{1}{n^2},$$

e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.
Per $x = 1$ otteniamo, tenuto conto dello sviluppo visto sopra, che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge. Mentre per $x = -1$ risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, n \, (e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

che converge per il criterio di Leibniz perché nel termine generale della serie il coefficiente di $(-1)^n$ tende a zero decrescendo (basta fare la derivata prima di $f(t) = t\,(e^{\frac{1}{t^2}} - 1)$). Quindi la serie converge puntualmente in $[-1, 1)$ e uniformemente sugli intervalli $[-1, 1-\delta]$, con con $0 < \delta < 2$.

3) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \cos^2 \dfrac{\pi}{\sqrt[3]{x}} & 1 < x, \end{cases} \tag{1}$$

a) Dire se esiste finito l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

b) Posto $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, stabilire per quali valori di $x \geq 0$ risulta

i) F é continua.

ii) F é derivabile.

Svolgimento.

a) Scomponiamo l'integrale nella somma:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt[3]{x}}\right) dt.$$

Consideriamo il secondo integrale determinando l'andamento della funzione integranda all'infinito.

$$1 - \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt[3]{x}} = 1 - \left[1 - \frac{\pi^2}{2\sqrt[3]{x^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\right]^2 = \frac{\pi^2}{\sqrt[3]{x^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right).$$

Questa si comporta come $\dfrac{1}{x^{2/3}}$, essendo l'esponente minore di uno si ha che

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty.$$

b) Osserviamo che possiamo scrivere

$$F(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt,$$

che ovviamente é derivabile (e quindi continua)su $(1,+\infty)$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale. Resta da stabilire il suo comportamento nel punto $x=1$. In questo punto F risulta continua perché se $x>1$:

$$|F(x)-F(1)| = \left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt\right| = \left|\int_1^x f(t)\,dt\right| = \int_1^x \left|1-\cos^2\frac{\pi}{\sqrt[3]{x}}\right| dx \le$$

$$\le \int_1^x \left(1+\left|\cos^2\frac{\pi}{\sqrt[3]{x}}\right|\right) dx \le 2\int_1^x 1\,dx \le 2|x-1|.$$

Se $0<x<1$

$$|F(x) - F(1)| = \left|\int_1^x e^{t^2}\,dt\right| \le e\,|x-1|.$$

Mentre F non é derivabile in $x=1$ in quanto

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F(1+h)-F(1)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\left(1 - \cos^2\frac{\pi}{\sqrt[3]{t}}\right) dt = 1 - \cos^2\pi = 0.$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F(1-h)-F(1)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{-1}{h}\int_1^{1-h} e^{t^2}\,dt = e.$$