UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA
2007

Classi caratteristiche di fibrati vettoriali

Candidato
Mattia Talpo

Relatore
Prof. Angelo Vistoli
Scuola Normale Superiore

Controrelatore
Dott. Michele Grassi
Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

Introduzione

I concetti di fibrato vettoriale e di classe caratteristica fecero la loro comparsa nella prima metà del novecento, grazie ad alcune idee provenienti prevalentemente dall'ambito della geometria differenziale. In seguito entrambe le nozioni vennero generalizzate e approfondite da svariati matematici, tra i quali ad esempio Chern, Pontryagin, Stiefel e Whitney; il classico libro di Steenrod "Topology of fibre bundles", pubblicato attorno al 1950, è il primo trattamento organico riguardante questi argomenti.

La nozione di fibrato vettoriale ha come prototipo quella di fibrato tangente a una varietà differenziabile, che è definito come l'unione disgiunta degli spazi tangenti alla varietà in tutti i suoi punti, con una opportuna topologia e struttura differenziale. Il concetto è stato poi esteso negli anni, dapprima lasciando cadere la struttura differenziale, e successivamente anche la struttura di spazio vettoriale sulle fibre, i "pezzi" di cui è composto il fibrato.

L'idea che sta sotto la definizione odierna è quella di uno spazio topologico E ottenuto "attaccando" tante copie di un'altro spazio fissato F, la fibra, in modo tale che E sia localmente "fatto come" uno spazio prodotto $X \times F$. Più formalmente, come vedremo, si parla di una tripla (E, p, X) dove p è una funzione continua da E, lo spazio totale, a X, lo spazio base, e le fibre $p^{-1}(x) \subseteq E$ di p sono tutte omeomorfe allo spazio F.

Le classi caratteristiche sono invece un modo di associare ad ogni fibrato vettoriale una classe di coomologia dello spazio base, in modo che siano verificate certe proprietà di funtorialità.

Le classi di Chern, che sono particolari classi caratteristiche definite su fibrati vettoriali complessi, furono definite inizialmente da Chern stesso in termini della forma di curvatura di una varietà differenziabile. Successivamente furono anch'esse generalizzate ed estese al caso di fibrati vettoriali su spazi topologici, e si trovarono svariate loro applicazioni a diversi campi, anche non strettamente legati alla topologia. In particolare vennero trovati quattro assiomi che caratterizzano completamente le classi di Chern per fibrati su spazi paracompatti, e costituiscono un modo particolarmente "veloce" per presentare l'argomento.

In questa tesi verranno introdotti e studiati i due concetti, qui accennati, di fibrato vettoriale e classe caratteristica.

Nel primo capitolo verranno definiti i fibrati vettoriali e i loro morfismi, e verranno discusse brevemente alcune nozioni di base correlate, come quelle di sezione e di metrica.

Il secondo capitolo tratta di alcune delle costruzioni che si fanno con i fibrati vettoriali, che tipicamente riflettono quelle dell'algebra lineare, come ad esempio la somma diretta o il prodotto tensore.

Nel terzo capitolo verranno introdotte assiomaticamente le classi di Chern, e riportate alcune conseguenze immediate degli assiomi.

Il quarto capitolo infine è incentrato sulle Grassmaniane: si definiranno le Grassmaniane dei piani in $\mathbb{C}^n$ e in $\mathbb{C}^\infty$ e la loro topologia, verrà introdotto il fibrato tautologico e mostrato come esso sia strettamente legato alla classificazione dei fibrati vettoriali complessi su spazi paracompatti; si utilizzeranno inoltre questi risultati per accennare a una costruzione delle classi di Chern. Per ultimo verrà calcolato l'anello di coomologia delle Grassmaniane complesse infinite, che ha una descrizione abbastanza semplice in termine delle classi di Chern stesse.

Indice

Capitolo 1

Fibrati vettoriali

In questo primo capitolo verranno introdotti il concetto di fibrato vettoriale, che è il principale oggetto di questa tesi, e alcune nozioni correlate.

In particolare si definiranno i morfismi, con cui la collezione dei fibrati vettoriali diventa una categoria; seguirà dunque in modo naturale una nozione di isomorfismo tra fibrati.

Successivamente verrà introdotto il concetto di sezione di un fibrato vettoriale, che generalizza quello di campo vettoriale su una varietà differenziabile. Verrà sottolineato inoltre come alcune proprietà delle sezioni siano collegate alla banalità del fibrato.

Infine si discuterà la nozione di metrica su un fibrato vettoriale, che generalizza invece quella di metrica Riemanniana su una varietà differenziabile.

1.1 Definizioni e primi esempi

Definizione 1.1. *Sia F uno spazio topologico. Un **fibrato** a fibra F è una tripla $\xi = (E, p, X)$, dove:*

- *E ed X sono spazi topologici, detti rispettivamente **spazio totale** e **spazio base***
- *$p : E \to X$ è una funzione continua e surgettiva, detta **proiezione***
- *vale la seguente condizione di **banalità locale**: per ogni $x \in X$ esistono $U \subseteq X$ intorno di x e un omeomorfismo $\phi_x : p^{-1}(U) \to U \times F$ detto **banalizzazione locale** in x, tale che $\pi_U \circ \phi_x = p$, dove $\pi_U : U \times F \to U$ è la proiezione sul primo fattore.*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi_x"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Il fibrato si dice ***banale*** *se esiste una banalizzazione locale con dominio l'intero spazio* E.

Dato $x \in X$ l'insieme $p^{-1}(x) \subseteq E$ viene chiamato *fibra* di ξ sopra x, e verrà indicata d'ora in avanti con E_x. Segue della definizione che tutte le fibre sono omeomorfe allo spazio F.

In effetti un fibrato si può pensare, in modo più evocativo, come una *famiglia* di spazi E_x indicizzati dagli elementi di X, tutti omeomorfi alla fibra F e incollati insieme dalla topologia dello spazio totale E, che localmente è proprio "fatto come" un prodotto, come è assicurato dalla proprietà di banalità locale.

Esempio 1.2. Per ogni coppia di spazi X ed F c'è un fibrato banale su X a fibra F, dato dal prodotto cartesiano $X \times F$ con la proiezione sulla prima componente.

Una classe particolare di fibrati si ottiene aggiungendo alle fibre una struttura di spazio vettoriale.

Definizione 1.3. *Un* ***fibrato vettoriale*** *reale è un fibrato* $\xi = (E, p, X)$ *a fibra* $\mathbb{R}^n$ *per un qualche* n*, che viene chiamato* ***rango*** *del fibrato, e tale che:*

- *su ogni fibra* E_x *è assegnata una struttura di spazio vettoriale reale*
- *per ogni* $x \in X$ *esiste una banalizzazione locale* $\phi_x : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$*, che è un isomorfismo di spazi vettoriali tra* E_y *e* $\{y\} \times \mathbb{R}^n$ *per ogni* $y \in U$.

D'ora in poi con "banalizzazione locale" di un fibrato *vettoriale* intenderemo sempre una banalizzazione locale che sia lineare ristretta alle fibre.

In modo analogo si definiscono fibrati vettoriali *complessi*, sulle cui fibre si dà una struttura di spazio vettoriale complesso. Nel seguito verrà usato il simbolo $\mathbb{K}$ per indicare indifferentemente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, nel caso in cui la distinzione tra i due campi sia irrilevante.

Esempio 1.4. Per ogni spazio X e numero naturale n, sulle fibre del fibrato prodotto $X \times \mathbb{K}^n$ c'è una struttura naturale di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale data da $\lambda(x, v) + \mu(x, w) = (x, \lambda v + \mu w)$, per $x \in X$, $v, w \in \mathbb{K}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Il fibrato vettoriale che si ottiene si indica con ε^n_X, oppure con ε^n se non occorre specificare lo spazio base (il campo degli scalari verrà specificato di volta in volta, quando necessario).

Esempio 1.5. Se M è una varietà differenziabile, l'unione disgiunta degli spazi tangenti $TM = \coprod_{x \in M} T_x M$ è lo spazio totale di un fibrato vettoriale reale con spazio base M, detto *fibrato tangente* a M, e che viene indicato con τ_M. Gli elementi di TM sono coppie (x, v) con x punto di M e v vettore tangente a x, e la fibra sopra un punto x di M è lo stesso spazio tangente $T_x M$, con la propria struttura di spazio vettoriale. Per approfondimenti si può vedere ad esempio [6], o qualsiasi altro libro di geometria differenziale.

Una varietà con fibrato tangente banale viene detta *parallelizzabile*. Come vedremo, ad esempio, S^1 è parallelizzabile mentre S^2 non lo è.

Esempio 1.6. Per ogni n c'è un fibrato vettoriale di rango 1 su $\mathbb{RP}^n$ (che vediamo come l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^{n+1}$), che si chiama *fibrato tautologico* e viene indicato con $\gamma_n^1(\mathbb{R})$, costruito nel modo seguente: lo spazio totale è l'insieme $E = \{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v \in l\}$ con la topologia di sottospazio, e la proiezione $p : E \to \mathbb{RP}^n$ è la proiezione sul primo fattore.

Le banalizzazioni locali si trovano facilmente vedendo $\mathbb{RP}^n$ come quoziente di S^n, con proiezione $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ data da $\pi(x) = l_x$, dove l_x è la retta in $\mathbb{R}^{n+1}$ passante per l'origine e per x.

Dato $l \in \mathbb{RP}^n$ si prende $V \subseteq S^n$ la semisfera aperta centrata in uno dei due punti di $\pi^{-1}(l)$, e $U = \pi(V)$ la sua proiezione in $\mathbb{RP}^n$. La banalizzazione si definisce sulle singole fibre, proiettandole ortogonalmente sulla fibra sopra l (cioè l stessa); per la scelta dell'aperto U tale proiezione è sicuramente un isomorfismo di spazi vettoriali su ogni fibra, e la funzione globale è un omeomorfismo da $p^{-1}(U)$ in $U \times \mathbb{R}$.

In effetti il fibrato si chiama tautologico perchè la fibra sopra un punto di $\mathbb{RP}^n$, cioè sopra una retta in $\mathbb{R}^{n+1}$, è proprio la retta stessa con la sua struttura di spazio vettoriale. Vedremo in seguito che $\gamma_n^1(\mathbb{R})$ non è mai un fibrato banale.

Esempio 1.7. In modo analogo a quanto appena fatto si definisce il fibrato tautologico su $\mathbb{CP}^n$, che si indica con $\gamma_n^1(\mathbb{C})$. La condizione di banalità locale verrà verficata nel capitolo 4, nel caso più generale del fibrato tautologico sulle *Grassmaniane complesse*.

Procediamo definendo i morfismi tra gli oggetti appena introdotti.

Definizione 1.8. *Un* ***morfismo*** $\sigma : \xi \to \eta$ *tra due fibrati vettoriali* $\xi = (E, p, X)$ *e* $\eta = (F, q, Y)$ *sullo stesso campo è una coppia* $\sigma = (f, g)$ *di funzioni continue* $f : E \to F$, $g : X \to Y$*, tali che:*

- $g \circ p = q \circ f$*, cioè il diagramma seguente commuta:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

  equivalentemente si può dire che $f(E_x) \subseteq F_{g(x)}$ *per ogni* $x \in X$*, cioè che* f *porta la fibra di* $x \in X$ *nella fibra di* $g(x) \in Y$

- *per ogni* $x \in X$ $f_{|E_x} : E_x \to F_{g(x)}$ *è un'applicazione lineare.*

D'ora in poi dove non sarà specificato diversamente, tutti i morfismi e le costuzioni che conivolgono più di un fibrato saranno tra fibrati sullo stesso campo.

Osservazione 1.9. I morfismi tra fibrati vettoriali si possono *comporre*, semplicemente componendo le corrispondenti funzioni. In altri termini dati tre fibrati vettoriali ξ, η, ζ e due morfismi $\sigma = (f, g) : \xi \to \eta$ e $\rho = (h, k) : \eta \to \zeta$ si definisce un morfismo $\rho \circ \sigma : \xi \to \zeta$ ponendo $\rho \circ \sigma = (h \circ f, k \circ g)$. È immediato verificare che questa definizione è ben posta, cioè $\rho \circ \sigma$ è effettivamente un morfismo. Inoltre per ogni fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$ c'è un *morfismo identità* tra ξ e sè stesso che indichiamo con id_ξ, definito da $\mathrm{id}_\xi = (\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_X)$, e che fa appunto da identità per questa composizione.

Fibrati vettoriali, con morfismi e composizione appena definiti formano una categoria. Come in tutte le categorie c'è quindi una definizione naturale di isomorfismo tra fibrati, che è quella di morfismo invertibile.

Definizione 1.10. *Un morfismo di fibrati vettoriali $\sigma : \xi \to \eta$ è un* ***isomorfismo*** *se esiste un morfismo $\rho : \eta \to \xi$ tale che $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_\xi$ e $\sigma \circ \rho = \mathrm{id}_\eta$. Due fibrati vettoriali ξ ed η si dicono* ***isomorfi****, e si scrive $\xi \cong \eta$, se esiste un isomorfismo $\sigma : \xi \to \eta$.*

Per come abbiamo definito la composizione se $\sigma = (f, g)$ è un isomorfismo, allora f e g sono omeomorfismi e f è un isomorfismo di spazi vettoriali ristretta ad ogni fibra.

Allo stesso modo si definiscono morfismi tra fibrati vettoriali su uno spazio base fissato X, prendendo $g = \mathrm{id}_X$ nella definizione 1.8.

Esplicitamente, un morfismo $f : \xi \to \eta$ tra due fibrati vettoriali $\xi = (E, p, X)$ e $\eta = (Y, q, X)$ su X è una funzione continua $f : E \to F$ tale che $q \circ f = p$, cioè il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

e tale che $f_{|E_x} : E_x \to F_x$ è un'applicazione lineare per ogni $x \in X$.

La composizione tra morfismi di questo tipo è un caso particolare di quella definita in generale, ed è chiaro che composizione di morfismi tra fibrati su uno stesso spazio X rimane un morfismo tra fibrati su X.

In particolare un *isomorfismo* tra ξ ed η come sopra è un morfismo $f : \xi \to \eta$ invertibile, o equivalentemente tale che $f : E \to F$ sia globalmente un omeomorfismo, e un isomorfismo di spazi vettoriali ristretta ad ogni fibra.

Esempio 1.11. Si può osservare che un fibrato vettoriale su X di rango n è banale se e solo se è isomorfo in questo senso al fibrato banale ε^n_X. Infatti una banalizzazione con dominio l'intero spazio totale è proprio un isomorfismo con il fibrato ε^n_X.

L'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali reali o complessi su uno spazio X si indica solitamente con $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(X)$, mentre con $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}}(X)$ si indica l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati di rango n.

Un'altra definizione naturale è quella di sottofibrato.

Definizione 1.12. *Sia $\xi = (E, p, X)$ un fibrato vettoriale. Un* ***sottofibrato vettoriale*** *di ξ è un fibrato vettoriale $\eta = (F, q, X)$ su X tale che:*

- *$F \subseteq E$ e ha la topologia di sottospazio*
- *$p_{|_F} = q$, cioè le due proiezioni coincidono sullo spazio F*
- *$F_x \subseteq E_x$ è un sottospazio vettoriale per ogni $x \in X$.*

D'ora in poi scriveremo $\eta \subseteq \xi$ per indicare che η è sottofibrato di ξ.

1.2 Sezioni

Definizione 1.13. *Una* ***sezione*** *di un fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$ è una funzione continua $s : X \to E$ che inverte la proiezione p a destra, cioè tale che $p \circ s = \mathrm{id}_X$.*

In pratica una sezione è un modo continuo di associare ad ogni punto dello spazio base un punto nella sua fibra. Ad esempio, una sezione del fibrato tangente τ_M di una varietà M è quello che si chiama un *campo vettoriale continuo* su M.

Definizione 1.14. *Una sezione s si dice* ***mai nulla*** *se per ogni $x \in X$ si ha $s(x) \neq 0_x$, dove $0_x \in E_x$ è lo zero dello spazio vettoriale E_x.*

Osservazione 1.15. L'esistenza di sezioni mai nulle è collegata alla banalità del fibrato: infatti un fibrato banale ha almeno una sezione mai nulla, che si ottiene recuperando tramite l'isomorfismo con ε^n_X la sezione $s : X \to X \times \mathbb{R}^n$ data da $s(x) = (x, v)$, con $v \in \mathbb{K}^n$ fissato e diverso da zero. In particolare se un fibrato non ha sezioni mai nulle allora non può essere banale (il viceversa, come vedremo, vale solo per i fibrati di rango 1).

Esempio 1.16. Questo fatto può essere usato per dimostrare che alcuni fibrati non sono banali, ad esempio $\gamma^1_n(\mathbb{R})$ su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e il fibrato tangente alle sfere di dimensione pari $\tau_{S^{2n}}$.

Dimostrazione.

- $\gamma^1_n(\mathbb{R})$ **non ha sezioni mai nulle**: fissiamo n, e indichiamo con $E = \{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v \in l\}$ lo spazio totale di γ^1_n. Se $s : \mathbb{RP}^n \to E$ è una sezione, consideriamo la composizione $s' = s \circ \pi : S^n \to E$, dove $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ è la proiezione al quoziente. Scriviamo $s'(x) = (l_x, t(x)x)$, dove l_x è la retta in $\mathbb{R}^{n+1}$ passante per l'origine e per x. Per le proprietà della topologia quoziente abbiamo che $t : S^n \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $t(-x) = -t(x)$, e dunque per connessione di S^n esiste $x_0 \in S^n$ tale che $t(x_0) = 0$. Infine $s(l_{x_0}) = (l_{x_0}, 0)$, e quindi s non è mai nulla.

- **Se $n > 0$, $\tau_{S^{2n}}$ non ha sezioni mai nulle**: segue direttamente da un noto risultato di topologia algebrica che utilizza il concetto di *grado* di un'applicazione da S^n in sè, e asserisce proprio che non esistono campi vettoriali continui mai nulli su S^{2n}. Una dimostrazione di questo fatto si può trovare ad esempio in [3]. □

Il seguente concetto è una generalizzazione di quello di sezione mai nulla, ed è collegato anch'esso alla banalità dei fibrati vettoriali.

Definizione 1.17. *Diciamo che k sezioni $s_1, \dots, s_k : X \to E$ di un fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$ sono* ***indipendenti*** *se per ogni $x \in X$ i vettori $s_1(x), \dots, s_k(x)$ sono linearmente indipendenti in E_x.*

Vale la seguente proposizione, che caratterizza i fibrati banali in termini di sezioni indipendenti.

Proposizione 1.18. *Un fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$ di rango n è banale se e solo se esistono n sezioni $s_1, \dots, s_n : X \to E$ indipendenti.*

La dimostrazione si basa sul seguente lemma.

Lemma 1.19. *Se $\xi = (E, p, X)$, $\eta = (F, q, X)$ sono fibrati vettoriali su X e $f : \xi \to \eta$ è un morfismo tale che $f_{|E_x} : E_x \to F_x$ è un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $x \in X$, allora f è un isomorfismo di fibrati vettoriali.*

Dimostrazione. Le ipotesi implicano direttamente che f è una bigezione. L'unica cosa da verificare è che $f^{-1} : F \to E$ è una funzione continua.

Poichè quest'ultima è una questione locale, possiamo restringerci a un aperto $U \subseteq X$ su cui sia ξ che η sono banali. Componendo con le banalizzazioni, siamo ulteriormente ricondotti al caso di una funzione continua $g : U \times \mathbb{K}^n \to U \times \mathbb{K}^n$ della forma $g(x, v) = (x, M_x(v))$, dove M_x è un elemento di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, che dipende in modo continuo da $x \in U$. Da questo, ragionando per componenti, segue che anche $x \mapsto M_x^{-1}$ è una funzione continua (gli elementi della matrice inversa sono funzioni razionali degli elementi della matrice M_x, che dipendono in modo continuo da x). L'inversa di g è data chiaramente da $g^{-1}(x, v) = (x, M_x^{-1}(v))$, che è quindi una funzione continua, e da questo segue la tesi. □

Dim. della proposizione 1.18. Supponiamo che ξ sia banale, cioè che esista un isomorfismo di fibrati $f : \varepsilon_X^n \to \xi$. Notiamo innanzitutto che ε_X^n ha n sezioni indipendenti $s_i : X \to X \times \mathbb{K}^n$, date da $s_i(x) = (x, e_i)$, dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una qualunque base di $\mathbb{K}^n$. Componendo queste sezioni con la funzione $f : X \times \mathbb{K}^n \to E$ si ottengono n sezioni indipendenti del fibrato ξ, perchè f ristretta ad ogni fibra è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Viceversa, supponiamo che ξ abbia n sezioni $s_1, \ldots, s_n$ indipendenti. Allora la funzione $f : X \times \mathbb{K}^n \to E$ data da $f(x, v) = \sum_{i=1}^n v_i s_i(x)$, dove $v = (v_1, \ldots, v_n)$, è un isomorfismo tra ε_X^n e ξ. Infatti per l'indipendenza delle sezioni è un isomorfismo ristretto ad ogni fibra, ed è chiaramente continua, dunque è un isomorfismo per il lemma precedente. □

Osservazione 1.20. Con una dimostrazione sostanzialmente analoga si ha la seguente generalizzazione: *un fibrato vettoriale ξ ha un sottofibrato banale di rango n se e solo se ha n sezioni mai dipendenti*. In particolare quindi il massimo numero di sezioni indipendenti di un fibrato coincide con il massimo dei ranghi dei suoi sottofibrati banali.

Esempio 1.21. Un'applicazione della proposizione 1.18 è il fatto che S^1, S^3 e S^7 sono varietà parallelizzabili.

Ad esempio il fibrato tangente a S^1 ha la sezione mai nulla $s : S^1 \to TS^1$ data da $s(x) = (x, (-x_2, x_1))$, dove vediamo S^1 immersa in $\mathbb{R}^2$ come insieme dei vettori di norma 1 e $x = (x_1, x_2) \in S^1$. Per la proposizione precedente si ha dunque che τ_{S^1} è banale.

Osserviamo inoltre che la sezione s si ottiene, una volta identificato $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ nel modo usuale, tramite moltiplicazione per i, $(-x_2, x_1) = -x_2 + ix_1 = i(x_1 + ix_2) = i(x_1, x_2)$.

Per quanto riguarda S^3, che di nuovo vediamo come insieme degli elementi di norma 1 in $\mathbb{R}^4$, si verifica che le tre sezioni del fibrato tangente

$$\begin{aligned} s_1(x) &= (x, (-x_2, x_1, -x_4, x_3)) \\ s_2(x) &= (x, (-x_3, x_4, x_1, -x_2)) \\ s_3(x) &= (x, (-x_4, -x_3, x_2, x_1)) \end{aligned}$$

dove $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$, sono indipendenti, e dunque τ_{S^3} è banale.

Di nuovo osserviamo che, una volta identificato $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{H}$, il corpo dei quaternioni, tramite $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, le tre sezioni s_1, s_2, s_3 si ottengono come moltiplicazione rispettivamente per i, j, k. Infatti si ha

$$\begin{aligned} -x_2 + ix_1 - jx_4 + kx_3 &= i(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) \\ -x_3 + ix_4 + jx_1 - kx_2 &= j(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) \\ -x_4 - ix_3 + jx_2 + kx_1 &= k(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4). \end{aligned}$$

Allo stesso modo, usando le unità dell'algebra degli ottetti di Cayley, si trovano sette sezioni indipendenti di S^7, che quindi è anch'essa parallelizzabile.

Un fatto vero ma sensibilmente meno facile da provare è che le uniche sfere parallelizzabili sono proprio S^1, S^3 ed S^7; questo risultato, che si può dimostrare ad esempio tramite la K-teoria, una branca della topologia algebrica che studia un certo anello costruito a partire da $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(X)$, è in effetti profondamente connesso all'esistenza di una struttura di algebra senza divisori dello zero su $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, che in effetti si può trovare solo per $n = 2$ (i numeri complessi), $n = 4$ (i quaternioni), e $n = 8$ (gli ottetti di Cayley). Per la dimostrazione si veda [2], oppure [4].

1.3 Fibrati Euclidei ed Hermitiani

Un'altro strumento utile per lo studio dei fibrati, soprattutto per costruzioni che vedremo nel seguito, sono i prodotti scalari ed Hermitiani.

Definizione 1.22. *Una* ***metrica Euclidea*** *su un fibrato vettoriale reale* $\xi = (E, p, X)$ *è una funzione continua* $\mu : E \to \mathbb{R}$ *tale che per ogni* $x \in X$ *la restrizione* $\mu_x = \mu_{|_{E_x}} : E_x \to \mathbb{R}$ *è una forma quadratica definita positiva.*
Un fibrato vettoriale reale su cui è assegnata una metrica euclidea viene detto un ***fibrato Euclideo****.*

Analogamente si definiscono metriche *Hermitiane* su fibrati vettoriali complessi e fibrati *Hermitiani*.

Osservazione 1.23. Chiaramente per ogni $x \in X$ dalla forma quadratica μ_x si ricava un prodotto scalare (oppure Hermitiano) definito positivo sulla fibra E_x, che indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$, utilizzando la formula

$$\langle v, w \rangle_x = \frac{1}{2}(\mu_x(v + w) - \mu_x(v) - \mu_x(w))$$

nel caso reale, e

$$\langle v, w \rangle_x = \frac{1}{2}(\mu_x(v + w) - \mu_x(v) - \mu_x(w)) + \frac{i}{2}(\mu_x(v + iw) - \mu_x(v) - \mu_x(iw))$$

nel caso complesso.

Esempio 1.24. Sul fibrato banale ε^n_X (reale o complesso) c'è una metrica "banale", data da $\mu(x, v) = \|v\|^2$, dove $\|v\|$ è l'usuale norma euclidea di un vettore di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

Uno dei motivi per cui si introduce questa struttura aggiuntiva è che permette, ogni volta che si ha un fibrato e un suo sottofibrato, di decomporre il primo in una somma diretta, prendendo l'ortogonale tramite il prodotto scalare appena definito.

L'esistenza di metriche Euclidee o Hermitiane è assicurata da ipotesi abbastanza generali sullo spazio base X.

Proposizione 1.25. *Se $\xi = (E, p, X)$ è un fibrato vettoriale reale (risp. complesso) con X paracompatto, allora esiste una metrica Euclidea (risp. Hermitiana) su ξ.*

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice paracompatto se è di Hausdorff e per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X esiste una partizione dell'unità $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ subordinata ad $\mathcal{U}$, cioè una famiglia di funzioni continue $\varphi_j : X \to \mathbb{R}$ tali che:

- per ogni $j \in J$ esiste $i \in I$ tale che $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq U_i$, dove $\operatorname{supp}(f)$ è il supporto di f
- ogni $x \in X$ ha un intorno V tale che tutte le φ_j tranne al più un numero finito sono identicamente nulle su V
- per ogni $x \in X$ vale $\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = 1$.

Dim. della proposizione 1.25. Supponiamo che ξ sia un fibrato vettoriale reale (il caso complesso è analogo).

Prendiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X tale che ξ sia banale su ciascun U_i, e siano $g_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ le corrispondenti banalizzazioni locali. Poichè X è paracompatto abbiamo inoltre una partizione dell'unità $\{\varphi_j\}_{j \in I}$ subordianta al ricoprimento $\mathcal{U}$.

A questo punto definiamo una funzione $\mu : E \to \mathbb{R}$ come $\mu(v) = \sum_{j \in J} \|g_{i(j)}(v)\|^2 \varphi_j(p(v))$, dove $\| \cdot \|$ è la norma euclidea di $\mathbb{R}^n$, e per ogni $j \in J$ abbiamo indicato con $i(j)$ un elemento di I tale che $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq U_i$. È chiaro che la funzione μ è continua ed è una forma quadratica definita positiva ristretta ad ogni fibra, e dunque è una metrica Euclidea. $\square$

Capitolo 2

Operazioni tra fibrati

Dopo aver introdotto il concetto di fibrato vettoriale, passiamo a descrivere alcune costruzioni standard che si fanno utilizzando questa struttura. A parte la costruzione dei pullbacks, le altre che verranno presentate sono la controparte a livello di fibrati di operazioni tipiche dell'algebra lineare.

Tali operazioni sono alla base di tutto quello che seguirà riguardo alle classi caratteristiche e al fibrato tautologico sulla Grassmaniana, e sono molto importanti anche in altre parti della teoria dei fibrati vettoriali correlate, ad esempio la già citata K-teoria.

2.1 Fibrato indotto

Dato un fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$ e una funzione continua $f : Y \to X$ da uno spazio topologico Y in X, vogliamo definire un fibrato $\eta = (E', p', Y)$ con spazio base Y, che sia costruito mettendo sopra ogni $y \in Y$ la fibra $E_{f(y)}$ di $f(y)$, e incollando tutte queste fibre in modo compatibile con la topologia di E e la funzione f. Più formalmente vogliamo che esista un morfismo $\sigma = (f', f) : \eta \to \xi$ tale che la fibra sopra un punto $y \in Y$ venga mandata da f' nella fibra sopra $f(y) \in X$ con un isomorfismo.

Poniamo $E' = \{(y, v) \in Y \times E : f(y) = p(v)\} \subseteq Y \times E$ dotato della topologia di sottospazio, e definiamo $p' : E' \to Y$ e $f' : E' \to E$ come le restrizioni al sottospazio E' delle proiezioni sul primo e sul secondo fattore di $Y \times E$. Dotiamo inoltre per ogni $y \in Y$ la fibra di p' sopra y della struttura di spazio vettoriale indotta da $E_{f(y)}$, poniamo cioè $\lambda(y, v) + \mu(y, w) = (y, \lambda v + \mu w)$ per ogni $y \in Y$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Abbiamo quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} E' \subseteq Y \times E \arrow[r, "f' = \pi_E"] \arrow[d, "p' = \pi_Y"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Proposizione 2.1. *$\eta = (E', p', Y)$ è un fibrato vettoriale dello stesso rango di ξ, e $\sigma = (f', f) : \eta \to \xi$ è un morfismo tale che $f'_{|_{E'_y}} : E'_y \to E_{f(y)}$ è un isomorfismo per ogni $y \in Y$. Inoltre η è l'unico fibrato vettoriale su Y, a meno di isomorfismi, che soddisfa queste proprietà.*

Definizione 2.2. *il fibrato η così definito viene indicato con $f^*(\xi)$, e viene chiamato il **pullback** di ξ tramite f o **fibrato indotto** da ξ tramite f.*

Dimostrazione. Dalla costruzione è chiaro che la mappa p' è continua e surgettiva. Per mostrare che $f^*(\xi)$ è un fibrato vettoriale l'unica cosa da verificare è che vale la proprietà di banalità locale.

Consideriamo un aperto $U \subseteq X$ tale che ξ sia banale su U, sia $\phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^n$ una banalizzazione locale, e indichiamo con $\pi : U \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la proiezione sul secondo fattore. Poniamo $V = f^{-1}(U) \subseteq Y$, e definiamo $\psi : (p')^{-1}(V) \to V \times \mathbb{K}^n$ come $\psi(y, v) = (y, \pi(\phi(v)))$.

Notiamo che, dato $(y, v) \in (p')^{-1}(V)$, si ha $y \in V = f^{-1}(U)$, cioè $f(y) \in U$, e, per definizione di E', $v \in E_{f(y)}$, quindi in particolare $v \in p^{-1}(U)$; dunque la funzione ψ è ben definita. Inoltre è chiaramente lineare su ciascuna fibra di p', continua e bigettiva. È facile verificare che se $h : U \times \mathbb{K}^n \to p^{-1}(U)$ è l'inversa di ϕ, l'inversa di ψ è data da

$$h'(y, v) = (y, h(f(y), v)) : V \times \mathbb{K}^n \to (p')^{-1}(V).$$

Da questo segue che ψ è un omeomorfismo, e dunque è una banalizzazione locale. Infine poichè gli aperti V costruiti in questo modo ricoprono Y abbiamo la tesi.

Il rango di $f^*(\xi)$ è chiaramente lo stesso di ξ, e il fatto che σ sia un globalmente un morfismo e un isomorfismo ristretto ad ogni fibra di $f^*(\xi)$ segue sostanzialmente per costruzione: le due funzioni sono continue e per ogni $y \in Y$ la funzione f' ristretta a $(E')_y$ è un isomorfismo per come è stata definita la struttura di spazio vettoriale su $(E')_y$.

Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che $\zeta = (F, q, Y)$ sia un altro fibrato vettoriale su Y con un morfismo $\rho = (g, f) : \zeta \to \eta$ tale che $g_{|_{F_y}} : F_y \to E_{g(y)}$ sia un isomorfismo per ogni $y \in Y$. Allora il morfismo $k : \zeta \to f^*(\xi)$ dato dalla funzione $k : F \to E'$ definita da $k(v) = (q(v), g(v))$ è un isomorfismo: infatti è un isomorfismo di spazi vettoriali ristretto ad ogni fibra per le ipotesi su ζ e le proprietà di $f^*(\xi)$, ed è continuo, dunque per il lemma 1.19 è globalmente un isomorfismo. In conlusione $\zeta \cong f^*(\xi)$, come si voleva. $\square$

Esempio 2.3. Un caso molto particolare di questa costruzione si ottiene, dato un fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$, prendendo un sottoinsieme dello spazio base $Y \subseteq X$, e come funzione l'inclusione $i : Y \hookrightarrow X$. Il fibrato $i^*(\xi)$ indotto su Y viene chiamato anche *restrizione* di ξ al sottospazio Y e si indica anche con $\xi_{|_Y}$. Esso si può anche ottenere prendendo $E' = p^{-1}(Y)$

come spazio totale, $p' = p_{|_{E'}}$ come proiezione, e mantenendo la struttura di spazio vettoriale indotta da ξ sulle fibre.

Esempio 2.4. Se $\xi = (E, p, X)$ è un fibrato banale e $x_0 \in X$, allora ξ è isomorfo al pullback del fibrato $\eta = (E_{x_0}, p_{|_{E_{x_0}}}, \{x_0\})$ tramite la funzione $f : X \to \{x_0\}$ che manda ogni punto in x_0.

Infatti: possiamo supporre direttamente che ξ sia il fibrato banale ε^n_X, dove n è il rango di ξ; è facile allora verificare che, se definiamo la funzione $f' : X \times \mathbb{K}^n \to \{x_0\} \times \mathbb{K}^n$ come $f'(x, v) = (x_0, v)$, il morfismo $(f', f) : \xi \to \eta$ soddisfa la proprietà caratteristica del pullback, e dunque, per la proposizione 2.1, ξ è isomorfo al pullback $f^*(\eta)$.

Osservazione 2.5. Dalla costruzione è evidente che se il fibrato ξ è banale anche $f^*(\xi)$ lo è, e più in generale se due fibrati ξ ed η con spazio base X sono isomorfi e $f : Y \to X$ è una funzione continua allora si ha $f^*(\xi) \cong f^*(\eta)$.

Osservazione 2.6. Questa costruzione gode di alcune proprietà funtoriali; precisamente se $\xi = (E, p, X)$ è un fibrato vettoriale, $f : Y \to X$ e $g : Z \to Y$ sono funzioni continue, allora si ha che $(f \circ g)^*(\xi) \cong g^*(f^*(\xi))$, e inoltre $\mathrm{id}_X{}^*(\xi) \cong \xi$.

Si può anche dimostrare che sotto alcune ipotesi mappe omotope inducono fibrati isomorfi: precisamente se $\xi = (E, p, X)$ è un fibrato vettoriale e $f, g : Y \to X$ sono mappe omotope con Y paracompatto, allora $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$. Per la dimostrazione si può consultare [2].

Mettendo insieme queste osservazioni si ha che per ogni n l'associazione

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}}(X) \\ [f] & \longmapsto & f^* \end{array}$$

dove $[f]$ indica la classe di omotopia di una funzione tra spazi paracompatti $f : X \to Y$ e $f^* : \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}} Y \to \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{K}} X$ associa a un fibrato ξ su Y il suo pullback $f^*(\xi)$ (ben definita per l'osservazione precedente), è un funtore controvariante dalla categoria degli spazi paracompatti con classi di omotopia di funzioni continue alla categoria degli insiemi.

In particolare un'equivalenza omotopica tra due spazi paracompatti induce una bigezione tra le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali di rango fissato.

Osservazione 2.7. Se il fibrato $\xi = (E, p, X)$ ha una metrica μ, sul fibrato $f^*(\xi) = (F, q, Y)$ c'è una metrica "naturale" $\nu : F \to \mathbb{R}$ indotta da μ. Precisamente, ponendo $\nu(y, v) = \mu(y)$ si ottiene una funzione continua, in quanto composizione di μ e della proiezione su Y, che è anche una forma quadratica definita positiva su ogni fibra, perchè lo è μ.

Nel seguito chiameremo ν il *pullback* della metrica μ, o metrica *indotta* da μ.

2.2 Prodotto cartesiano

Dati due fibrati vettoriali $\xi = (E, p, X)$ ed $\eta = (F, q, Y)$ si definisce il loro prodotto cartesiano nel seguente modo: poniamo $G = E \times F$, $r = p \times q : E \times F \to X \times Y$, e su ogni fibra di r, $G_{(x,y)} = r^{-1}(x, y) = E_x \times F_y$, mettiamo la struttura di spazio vettoriale prodotto.

Proposizione 2.8. *$\zeta = (G, r, X \times Y)$ soddisfa la proprietà di banalità locale, e dunque è un fibrato vettoriale.*

Dimostrazione. Se $\phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^n$ e $\psi = q^{-1}(V) \to V \times \mathbb{K}^m$ sono banalizzazioni locali di ξ ed η e π_n, π_m indicano la proiezione su $\mathbb{K}^n$ da $U \times \mathbb{K}^n$ e su $\mathbb{K}^m$ da $V \times \mathbb{K}^m$ rispettivamente, allora la funzione

$$\chi : r^{-1}(U \times V) = p^{-1}(U) \times q^{-1}(V) \to U \times V \times \mathbb{K}^{m+n}$$

data da

$$\chi(v, w) = (p(v), q(w), (\pi_n(\phi(v)), \pi_m(\psi(w))))$$

è una banalizzazione locale per ζ. □

Definizione 2.9. *Il fibrato vettoriale ζ viene chiamato **prodotto cartesiano** di ξ ed η e indicato con $\xi \times \eta$.*

2.3 Somma di Whitney

Dati due fibrati vettoriali $\xi = (E, p, X)$ ed $\eta = (F, q, X)$ sullo stesso spazio base X, vogliamo definire un terzo fibrato vettoriale su X in modo che la fibra sopra un punto $x \in X$ sia la somma diretta delle fibre di ξ ed η, $E_x \oplus F_x$.

Indichiamo con $d : X \to X \times X$ l'immersione diagonale nel prodotto, cioè la funzione data da $d(x) = (x, x)$.

Definizione 2.10. *Dati ξ ed η come sopra, il pullback $d^*(\xi \times \eta)$ del prodotto cartesiano $\xi \times \eta$ tramite d si indica con $\xi \oplus \eta$, e viene chiamato **somma di Whitney** o **somma diretta** di ξ ed η.*

Questo fibrato ha la proprietà che volevamo: infatti per definizione di prodotto cartesiano la fibra di $\xi \times \eta$ sopra il punto $(x, x) \in X \times X$ è proprio $E_x \oplus F_x$ (isomorfa a $E_x \times F_x$, essendo gli spazi vettoriali di dimensione finita), che per definizione di pullback è quindi anche la fibra di $\xi \oplus \eta$ sopra $x \in X$.

Esempio 2.11. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà differenziabile immersa. Il *fibrato normale* a M, che si indica con ν_M, è definito nel modo seguente: lo spazio totale è $E = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \in (T_x M)^\perp\}$ e la proiezione è data da $p(x,v) = x$; in altre parole sopra ogni punto della varietà c'è l'ortogonale allo spazio tangente in quel punto. Si può dimostrare che ν_M è effettivamente un fibrato vettoriale (si veda ad esempio [6]), e inoltre vale $\tau_M \oplus \nu_M \cong \varepsilon^n_M$. Infatti il morfismo $f : \tau_M \oplus \nu_M \to \varepsilon^n_M$ definito sulle fibre da $f(v,w) = v + w$ è chiaramente un isomorfismo ristretto ad ogni fibra, e dunque lo è anche globlmente, per il lemma 1.19.

Come anticipato, l'esistenza di una metrica su un fibrato dà la possibilità di decomporlo in somma diretta di suoi sottofibrati.

Proposizione 2.12. *Sia $\xi = (E,p,X)$ un fibrato vettoriale di rango n Euclideo (o Hermitiano) e $\eta = (F,q,X) \subseteq \xi$ un sottofibrato di rango m. Allora esiste un sottofibrato vettoriale $\zeta \subseteq \xi$ di rango $n-m$ su X tale che $\eta \oplus \zeta \cong \xi$.*

Definizione 2.13. *ζ si chiama **fibrato ortogonale** a η in ξ, e viene indicato con $\eta^\perp$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ il prodotto scalare (o Hermitiano) sulla fibra di $x \in X$ che si costruisce a partire dalla metrica come nell'osservazione 1.23, e indichiamo con $F_x^\perp \subseteq E_x$ l'ortogonale rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ del sottospazio $F_x \subseteq E_x$. Poniamo poi $G = \bigcup_{x\in X} F_x^\perp \subseteq E$, e $r = p_{|G}$.

Verifichiamo che $\zeta = (G,r,X)$ è un fibrato vettoriale: dato che la questione è locale in $x \in X$ e invariante per isomorfismo, possiamo supporre che ξ sia il fibrato banale ε^n_X, quindi $E = X \times \mathbb{K}^n$, e $p = \pi_X$. Fissiamo ora $x \in X$, e sia $U \subseteq X$ un intorno aperto di x su cui η è banale. Esistono dunque m sezioni $s_1,\dots,s_m$ di $\eta_{|U}$ indipendenti.

Completiamo l'insieme di vettori indipendenti $\{s_1(x),\dots,s_m(x)\} \subseteq E_x = \{x\}\times\mathbb{K}^n$ a una base $\{s_1(x),\dots,s_m(x),(x,v_{m+1}),\dots(x,v_n)\}$ di E_x. Per la continuità del determinante, restringendo opportunamente l'intorno U possiamo supporre che $\{s_1(y),\dots,s_m(y),(y,v_{m+1}),\dots,(y,v_n)\} \subseteq E_y$ siano linearmente indipendenti per ogni $y \in U$. Poniamo $s_i = (\cdot, v_i) : U \to U \times \mathbb{K}^n$ per $i = m+1,\dots,n$.

Applicando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_y$ in ogni fibra alle sezioni $s_1,\dots,s_n$ di $\xi_{|U}$ otteniamo n funzioni, che denotiamo con $t_1,\dots,t_n : U \to U \times \mathbb{K}^n$, date esplicitamente da:

$$\begin{aligned}
t_1 &= s_1\\
t_2 &= s_2 - t_1\frac{\langle s_2,t_1\rangle}{\langle t_1,t_1\rangle}\\
t_3 &= s_3 - t_1\frac{\langle s_3,t_1\rangle}{\langle t_1,t_1\rangle} - t_2\frac{\langle s_3,t_2\rangle}{\langle t_2,t_2\rangle}\\
&\vdots\\
t_n &= s_n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i\frac{\langle s_n,t_i\rangle}{\langle t_i,t_i\rangle}.
\end{aligned}$$

Da tali formule segue che le t_i sono sezioni di $\xi_{|_U}$, e che $\{t_1(y), \dots, t_m(y)\}$ è una base di F_y per ogni $y \in U$.

Consideriamo ora la funzione $\phi : p^{-1}(U) = U \times \mathbb{K}^n \to U \times \mathbb{K}^n$ definita da $\phi(y, t_i(y)) = (y, e_i)$, dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base standard di $\mathbb{K}^n$, ed estesa per linearità su ogni fibra. Per quanto visto si ha $\phi(F) = U \times \mathbb{K}^m$, $\phi(G) = U \times \mathbb{K}^{n-m}$, ed è chiaro che ϕ è globalmente un omeomorfismo, e un isomorfismo ristretta ad ogni fibra. Dunque $\phi_{|_G} : r^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^{n-m}$ è una banalizzazione locale di ζ, che quindi è un fibrato vettoriale.

È chiaro dalla costruzione che $\eta^\perp$ è un sottofibrato di ξ. Per concludere che $\xi \cong \eta \oplus \eta^\perp$ basta notare che il morfismo $f : \eta \oplus \eta^\perp \to \xi$ definito sulle fibre da $f(v, w) = v + w$ è un isomorfismo ristretto ad ogni fibra, e dunque per il lemma 1.19 è un isomorfismo di fibrati vettoriali. □

2.4 Proiettivizzato di un fibrato vettoriale

Introduciamo ora un'operazione che verrà usata nella costruzione delle classi di Chern, e che non produce un nuovo fibrato vettoriale, come tutte quelle viste finora, ma un fibrato a fibra $\mathbb{KP}^{n-1}$. Precisamente, dato un fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$ di rango n, vogliamo costruire un fibrato a fibra $\mathbb{KP}^{n-1}$, ottenuto da ξ identificando i vettori proporzionali in ogni fibra.

Definiamo dunque la seguente relazione di equivalenza in E: diciamo che $v \sim w$ se e solo se $p(v) = p(w)$ e $v = \lambda w$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$. Indichiamo inoltre con F il quoziente di $E \setminus \{0_x : x \in X\}$ per la relazione $\sim$, che in effetti coincide con l'unione disgiunta dei proiettivizzati delle fibre di ξ, e con q la funzione $q : F \to X$ indotta da p, che quindi manda una classe $[v]$ in $p(v)$. Dotiamo inoltre F della topologia quoziente.

È facile verificare che $\eta = (F, q, X)$ è un fibrato a fibra $\mathbb{KP}^{n-1}$: la continuità di q segue dalla proprietà universale del quoziente, per costruzione ogni fibra è omeomorfa a $\mathbb{KP}^{n-1}$, e in particolare le banalizzazioni locali $\psi_x : q^{-1}(U) \to U \times \mathbb{KP}^{n-1}$ sono indotte dalle banalizzazioni locali $\phi_x : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^n$ del fibrato vettoriale ξ (in particolare sono applicazioni proiettive ristrette ad ogni fibra).

Definizione 2.14. *Il fibrato $\eta = (F, q, X)$ viene chiamato **proiettivizzato di** ξ o **fibrato proiettivo associato a** ξ, e indicato con $\mathbb{P}(\xi)$.*

Osserviamo che lo spazio totale del proiettivizzato di ξ può essere visto come l'insieme delle rette contenute in una qualche fibra di ξ (analogamente agli spazi proiettivi ordinari); nel seguito verrà usata per la maggior parte quest'ultima interpretazione.

2.5 Prodotto tensore e altre costruzioni

Molte altre costruzioni dell'algebra lineare hanno degli analoghi a livello di fibrati vettoriali: si possono definire ad esempio il *prodotto tensore* di due fibrati $\xi \otimes \eta$ sullo stesso spazio base, il fibrato *duale* $\xi^* = \mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1_X)$, il fibrato *potenza esterna k-esima* $\bigwedge^k \xi$...

La costruzione, per esempio nel caso del prodotto tensore, viene fatta nel seguente modo: dati $\xi = (E, p, X)$ ed $\eta = (F, q, X)$, si prende come spazio totale l'unione disgiunta dei prodotti tensore delle fibre $G = \coprod_{x \in X} E_x \otimes F_x$ dotato di una certa topologia, come proiezione la funzione r che per ogni $x \in X$ manda $E_x \otimes F_x$ in x, e si verifica che effettivamente $\xi \otimes \eta = (G, r, X)$ è un fibrato vettoriale.

Più in generale, se indichiamo con $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ la categoria degli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita con gli isomorfismi come frecce, a partire da un qualsiasi funtore $F : \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \times \cdots \times \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ che soddisfi una certa proprietà di continuità rispetto ai morfismi, e dati k fibrati vettoriali $\xi_1, \ldots, \xi_k$ (dove k è il numero di fattori $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ nella categoria di partenza), si può definire un fibrato $F(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, generalizzando la costruzione accennata. Per approfondimenti si possono consultare [4] e [7].

Esempio 2.15. Un esempio interessante di ciò che si ottiene è il seguente: a partire dal funtore $\mathrm{Hom}(\cdot, \cdot) : \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \times \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, dati fibrati vettoriali ξ ed η su X come sopra, si costruisce il fibrato $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$; la fibra di questo sopra un punto $x \in X$ risulta essere lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ delle applicazioni lineari tra le fibre di ξ ed η sopra x. In particolare quindi, una sezione del fibrato $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ è una funzione che ad ogni $x \in X$ associa un'applicazione lineare $E_x \to F_x$; si dimostra inoltre che, per come è definita la topologia sullo spazio totale di $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$, la funzione globale che si ottiene $E \to F$ è continua.

In conclusione le sezioni di $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ "sono" esattamente i morfismi tra i due fibrati ξ ed η.

Capitolo 3

Classi caratteristiche

Come accennato nell'introduzione c'è un modo di associare ad ogni fibrato vettoriale alcune classi di coomologia dello spazio base, chiamate *classi caratteristiche* del fibrato, in modo che siano verificate certe proprietà.

Quest'associazione si può fare in più modi, a seconda che il fibrato sia reale o complesso, oppure che si consideri la coomologia a coefficienti in $\mathbb{Z}$ o in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e ancora a seconda che il fibrato sia orientabile o meno. Esistono quindi diversi tipi di classi caratteristiche; i quattro principali sono:

- le classi di *Stiefel-Whitney* per fibrati reali, a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- le classi di *Chern* per fibrati complessi, a coefficienti in $\mathbb{Z}$
- le classi di *Pontryagin* per fibrati reali, a coefficienti in $\mathbb{Z}$
- la classe di *Eulero* per fibrati reali orientati, a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

Nel resto di questa tesi ci occuperemo quasi esclusivamente delle classi di Chern, accennando solo brevemente alle loro relazioni con gli altri tipi di classi caratteristiche. D'ora in poi quindi, dove non sarà specificato diversamente, tutti i fibrati vettoriali considerati saranno complessi.

Un'altra assunzione che sarà implicita nel seguito è che tutti i fibrati saranno su spazi base paracompatti. Quest'assunzione non è restrittiva, in quanto ci sono metodi per passare, tramite pullback, a fibrati su "approssimazioni" paracompatte di uno spazio non paracompatto, in modo da preservare le proprietà che saranno oggetto del nostro studio.

3.1 Assiomi

Il modo più semplice per introdurre le classi di Chern è dare quattro assiomi, che in effetti le caratterizzano completamente.

Assioma 1. *C'è una corrispondenza che ad ogni fibrato vettoriale complesso* $\xi = (E, p, X)$ *di rango* n *associa classi di coomologia* $c_i(\xi) \in \mathrm{H}^{2i}(X;\mathbb{Z})$ *con* $i \geq 0$, *chiamate* ***classi di Chern*** *di* ξ*, che dipendono solo dalla classe di isomorfismo di* ξ*, e tali che:*

- $c_0(\xi) = 1$, *l'unità di* $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$
- $c_i(\xi) = 0$ *se* $i > n$.

L'elemento $c(\xi) = c_0(\xi) + \cdots + c_n(\xi) \in \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$ viene chiamato *classe di Chern totale* di ξ.

Assioma 2 (Naturalità). *Per un pullback* $f^*(\xi) = (F, q, Y)$ *di un fibrato vettoriale* $\xi = (E, p, X)$ *vale* $c_i(f^*(\xi)) = f^*(c_i(\xi))$, *dove* $f^* : \mathrm{H}^{2i}(X;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2i}(Y;\mathbb{Z})$ *a secondo membro indica l'omomorfismo indotto in coomologia dalla funzione* $f : Y \to X$.

La notazione apparentemente ambigua non dovrebbe in realtà creare problemi: ogni volta che f^* avrà come argomento un fibrato vettoriale indicherà un pullback, mentre ogni volta che sarà applicato a una classe di coomologia indicherà l'omomorfismo indotto da f.

Assioma 3. *Se* ξ *ed* η *sono fibrati vettoriali sullo stesso spazio base* X*, allora vale* $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \smile c(\eta)$*, dove* $\smile$ *indica il prodotto cup di* $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z})$.

Questo assioma si può riscrivere in maniera estesa per ogni singola classe c_i, e si traduce in $c_n(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=n} c_i(\xi) \smile c_j(\eta)$. D'ora in poi ometteremo il simbolo del prodotto cup nelle formule, sottointendendolo.

Fissiamo a questo punto un generatore σ di $\mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^1;\mathbb{Z})$, che ricordiamo essere isomorfo a $\mathbb{Z}$. L'ultimo assioma assicura che la costruzione che stiamo facendo non è banale.

Assioma 4 (Normalizzazione). *La classe* $c_1(\gamma_1^1(\mathbb{C})) \in \mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^1;\mathbb{Z})$ *del fibrato tautologico su* $\mathbb{CP}^1$ *è il generatore fissato di* $\mathrm{H}^2(\mathbb{CP}^1;\mathbb{Z})$.

D'ora in poi per bravità indicheremo semplicemente con $\mathbb{P}^n$ lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ e con γ_n^1 il fibrato tautologico $\gamma_n^1(\mathbb{C})$.

In effetti, come verrà accennato nel seguito, si dimostra che per qualsiasi scelta di σ, esiste un'unica associazione che soddisfa questi quattro assimomi, e quindi (una volta fatta questa scelta) le classi di Chern esistono e sono uniche.

Osservazione 3.1. Il fatto che le classi di Chern dipendono dalla scelta del generatore di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1;\mathbb{Z})$ sembra indicare che esistono due teorie diverse; in realtà queste si ottiengono l'una dall'altra semplicemente cambiando segno alle classi di grado dispari.

Infatti se abbiamo delle associazioni c_i che soddisfano i quattro assiomi, e poniamo $c_i'(\xi) = (-1)^i c_i(\xi)$, allora c_i' continuano a soddisfare i primi tre assiomi, mentre soddisfano il quarto con $-\sigma$ al posto di σ. Per l'unicità segue quindi che c_i' sono proprio le classi di Chern che si ottengono fissando $-\sigma$ come generatore di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1;\mathbb{Z})$.

Osservazione 3.2. In realtà c'è una scelta in qualche modo canonica per il generatore di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1;\mathbb{Z})$: infatti l'usuale struttura differenziale complessa su $\mathbb{P}^1$ induce un'orientazione su $\mathbb{P}^1$ vista come varietà topologica, e quindi determina un generatore "privilegiato" di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1;\mathbb{Z})$, la cosiddetta *classe fondamentale di omologia*, che si indica con $\mu_{\mathbb{P}^1}$. Di solito nel definire le classi di Chern si sceglie come generatore l'opposto della classe fondamentale, cioè si pone $c_1(\gamma_1^1) = -\mu_{\mathbb{P}^1}$.

Come abbiamo osservato però la teoria si può sviluppare anche nell'altro caso, e le due differiscono soltanto per il segno delle classi dispari; in quello che segue in effetti quest'assunzione aggiuntiva non sarà rilevante.

Come vedremo le classi di Chern danno una misura (parziale) di quanto il fibrato sia "non banale", anche se non sono invarianti completi.

Osservazione 3.3. La definizione originaria di Chern per le classi, risalente alla prima metà del Novecento, riguardava in realtà fibrati Hermitiani su varietà differenziabili e le classi di coomologia considerate erano a coefficienti in $\mathbb{C}$. In questo caso le classi di Chern sono, a meno di un fattore complesso, i coefficienti del polinomio caratteristico della forma di curvatura del fibrato ξ, cioè sono determinate dalla relazione

$$\det(I - \Omega t) = \sum_k (2\pi i)^k c_k(\xi) t^k$$

dove Ω è la forma di curvatura di ξ.

Solo successivamente, partendo da questo caso particolare in cui ammettono una definizione molto più "concreta", le classi sono state estese anche a fibrati vettoriali su spazi topologici, ed è stata data la definzione assiomatica con cui le abbiamo introdotte, che identifica in modo conciso le proprietà che le caratterizzano.

In particolare la costruzione che approfondiremo è più fine di quella differenziale, visto che considera classi di coomologia a coefficienti in $\mathbb{Z}$ piuttosto che in $\mathbb{C}$.

Osservazione 3.4. C'è un altro modo di introdurre le classi di Chern con 3 soli assiomi (contro i nostri 4), che fu proposto da Grothendieck, e richiede però alcune nozioni in più riguardo ai fibrati, e la classe di Eulero. Riportiamo per completezza anche gli assiomi di Grothendieck:

- **naturalità** : per i fibrati indotti vale $c(f^*(\xi)) = f^*(c(\xi))$
- **additività**: se $0 \to \xi \to \eta \to \zeta \to 0$ è una successione esatta di fibrati, allora si ha $c(\eta) = c(\xi)c(\zeta)$

- **normalizzazione**: se ξ è un fibrato di rango (complesso) 1, allora $c(\xi) = 1 + e(\xi_{\mathbb{R}})$, dove $e(\xi_{\mathbb{R}})$ è la classe di Eulero del fibrato vettoriale reale associato a ξ.

3.2 Conseguenze degli assiomi

Vediamo ora qualche immediata conseguenza degli assiomi e qualche esempio.

Proposizione 3.5. *Se $\xi = (E, p, X)$ è un fibrato banale, allora $c(\xi) = 1$, cioè $c_i(\xi) = 0$ per ogni $i \geq 1$.*

Dimostrazione. Per quanto visto nell'osservazione 2.4, ξ è isomorfo al pullback di un fibrato η su un punto $x_0 \in X$, tramite la funzione $f : X \to \{x_0\}$ che manda ogni punto in x_0.

Per l'assioma 2 dunque $c_i(\xi) = f^*(c_i(\eta)) = 0$, poiche $\mathrm{H}^i(\{x_0\}; \mathbb{Z})$ è banale se $i \geq 1$. □

Corollario 3.6. *Se η è un fibrato banale con spazio base X, allora per ogni fibrato vettoriale ξ su X si ha $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)$, cioè $c_i(\xi \oplus \eta) = c_i(\xi)$ per ogni i.*

Di solito ci si riferisce a questa proprietà dicendo che le classi di Chern sono *stabili*.

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente abbiamo che $c(\eta) = 1$, e dunque, usando l'assioma 3, troviamo $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta) = c(\xi)1 = c(\xi)$. □

Osservazione 3.7. Dal corollario precedente segue, ad esempio, che se un fibrato Hermitiano ξ di rango n ha k sezioni indipendenti, allora $c_{n-k+1}(\xi) = c_{n-k+2}(\xi) = \cdots = c_n(\xi) = 0$.

Infatti sappiamo che ξ ha un sottofibrato banale η di rango k, e dalla proposizione 2.12 segue che ξ si scrive come somma diretta $\xi = \eta \oplus \eta^\perp$, dove $\eta^\perp$ ha rango $n - k$. Ma allora abbiamo $c(\xi) = c(\eta^\perp)$, e poichè $\eta^\perp$ ha rango $n - k$ si ha $c_{n-k+1}(\eta^\perp) = c_{n-k+2}(\eta^\perp) = \cdots = c_n(\eta^\perp) = 0$.

Abbiamo visto che le classi di Chern di un fibrato banale sono banali. È naturale chiedersi se vale anche il viceversa, e la risposta è no. Infatti si può dimostrare che esistono fibrati vettoriali non banali e tali che per un certo n il fibrato $\xi \oplus \varepsilon^n$ sia banale. Per le osservazioni precedenti tali fibrati, che si dicono *stabilmente banali*, hanno le stesse classi del fibrato banale.

Un'altra conseguenza interessante dell'assioma 3 è il fatto che se due fibrati ξ ed η sullo stesso spazio X hanno somma diretta banale, allora si possono ricavare le classi di uno dei due in funzione delle classi dell'altro. Infatti dall'assioma 3, poichè $\xi \oplus \eta \cong \varepsilon^n_X$, segue che $c(\xi)c(\eta) = c(\varepsilon^n_X) = 1$. Riscrivendo questa relazione per esteso e raggruppando i termini dello stesso grado, si trova

$$\begin{aligned} 1 = c(\xi)c(\eta) &= 1 + \sum_{i\geq 1}\left(\sum_{j=0}^{i} c_j(\xi)c_{i-j}(\eta)\right) \\ &= 1 + (c_1(\xi) + c_1(\eta)) + (c_2(\xi) + c_1(\xi)c_1(\eta) + c_2(\eta)) + \cdots \end{aligned}$$

da cui, imponendo che si annullino i termini di ogni grado, si ricavano alcune relazioni tra le classi di ξ e di η che possono essere risolte induttivamente.

Ad esempio, se vogliamo ricavare le classi di η in funzione di quelle di ξ, le prime relazioni che otteniamo sono

$$\begin{cases} c_1(\eta) = -c_1(\xi) \\ c_2(\eta) = c_1(\xi)^2 - c_2(\xi) \\ c_3(\eta) = 2c_2(\xi)c_1(\xi) - c_1(\xi)^3 - c_3(\xi) \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Osservazione 3.8. Con quattro assiomi formalmente identici a quelli con cui abbiamo introdotto le classi di Chern si introducono le *classi di Stiefel-Whitney* per fibrati vettoriali reali, che si indicano solitamente con w_i. Le uniche differenze con le classi di Chern sono l'anello dei coefficienti, che è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e il fatto che $w_i(\xi)$ è un elemento di $\mathrm{H}^i(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (quindi ci sono anche classi dispari).

In effetti se si prendono coefficienti interi nel caso reale, la teoria risultante è un po' più complicata che nel caso complesso, ed è necessario introdurre anche le *classi di Pontryagin* per avere una descrizione allo stesso livello di quella che danno le classi di Chern.

3.3 Una definizione più generale

Esista una definizione più generale di classe caratteristica, in cui rientrano le classi di Chern e le altre nominate in precedenza, che è la seguente.

Definizione 3.9. *Una* ***classe caratteristica*** *c di rango n a coefficienti in un anello R è un'associazione che a ogni fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$ di rango n fa corrispondere una classe di coomologia $c(\xi) \in \mathrm{H}^*(X; R)$, che dipende solo dalla classe di isomorfismo di ξ, e tale che, se $f : Y \to X$ è una funzione continua, allora $c(f^*(\xi)) = f^*(c(\xi))$.*

Dalla definizione si osserva subito che le classi di Chern sono effettivamente classi caratteristiche (a coefficienti in $\mathbb{Z}$ e definite su fibrati vettoriali complessi di rango qualsiasi) in questo senso.

Osservazione 3.10. Le classi caratteristiche di rango n formano un anello. Infatti ci sono due operazioni naturali indotte dalla somma e dal prodotto cup in coomologia, date precisamente da

$$(c+d)(\xi) = c(\xi) + d(\xi)$$
$$(cd)(\xi) = c(\xi)d(\xi)$$

che per le loro proprietà a livello di coomologia rendono appunto l'insieme delle classi caratteristiche un anello.

Come le classi di Chern, le classi caratteristiche danno in un certo senso una "misura" di quanto il fibrato sia lontano dall'essere banale.

Osservazione 3.11. Si può dimostrare, e verrà accennato nel seguito, che l'anello delle classi caratteristiche di rango n a coefficienti in R è isomorfo all'anello di coomologia a coefficienti in R della *Grassmaniana complessa infinita* $\mathcal{G}_n$ che verrà introdotta nel capitolo successivo, tramite la mappa che manda una classe caratteristica c nella sua valutazione sul fibrato tautologico $c(\gamma^n)$.

L'ultima osservazione mette in luce come, allo scopo di studiare le classi caratteristiche (complesse), sia importante il calcolo della coomologia della Grassmaniana inifinita, che in effetti ha una descrizione abbastanza semplice in termini delle classi di Chern, e sarà lo scopo principale del prossimo capitolo.

Capitolo 4

Grassmaniane

Quest'ultimo capitolo ha la scopo di mostrare come le Grassmaniane complesse siano strettamente legate sia alla classificazione dei fibrati vettoriali complessi su spazi paracompatti, sia alle classi caratteristiche.

Verranno a questo scopo definite le Grassmaniane complesse, finite e infinite, e la loro topologia. Successivamente si introdurrà il fibrato tautologico sulla Grassmaniana complessa e verrà mostrato come esso sia legato alla classificazione dei fibrati vettoriali complessi.

I risultati trovati durante questa discussione verranno quindi applicati per accennare a una costruzione esplicita delle classi di Chern e a una dimostrazione della loro unicità. Infine verrà descritta una scomposizione in celle della grassmaniana infinita $\mathcal{G}_n$, che sarà poi utilizzata per il calcolo dell'anello di coomologia $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$.

4.1 Definizione e topologia

Cominciamo a definire la Grassmaniana complessa come insieme, indicando con $\mathcal{G}(n,k)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione k di $\mathbb{C}^n$ (chiaramente per $n \geq k$).

Per dare una topologia su $\mathcal{G}(n,k)$ introduciamo prima un'altro oggetto, la cosiddetta *varietà di Stiefel* $V(n,k)$, che come insieme è costituito da tutte le k-uple ortonormali di vettori di $\mathbb{C}^n$. Osserviamo che $V(n,k)$ è un sottoinsieme del prodotto di $S^{2n-1}\times\cdots\times S^{2n-1}$ in cui compaiono k fattori; dotiamolo dunque della topologia indotta da quest'ultimo spazio.

Notiamo inoltre che $V(n,k)$ è chiuso in $S^{2n-1}\times\cdots\times S^{2n-1}$. Infatti la relazione di ortogonalità tra due vettori si esprime in modo algebrico tramite il prodotto Hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$, e dunque $V(n,k)$ è intersezione di controimmagini di $\{0\}$ tramite funzioni continue. Poichè $S^{2n-1}\times\cdots\times S^{2n-1}$ è compatto in quanto prodotto di compatti, otteniamo che anche la varietà di Stiefel è compatta, in quanto è un chiuso di un compatto.

Definiamo a questo punto la topologia su $\mathcal{G}(n,k)$, notando che c'è un'applicazione suriettiva naturale $\Phi : V(n,k) \to \mathcal{G}(n,k)$, quella che manda ogni k-upla di $V(n,k)$ nel sottospazio k-dimensionale di $\mathbb{C}^n$ generato dalle sue componenti, cioè $\Phi(v_1,\ldots,v_k) = \mathrm{Span}\{v_1,\ldots,v_k\}$.

Definizione 4.1. *La **Grassmaniana** dei k-piani in $\mathbb{C}^n$ è l'insieme $\mathcal{G}(n,k)$ dotato della topologia quoziente rispetto all'applicazione Φ.*

In altri termini un sottoinsieme $U \subseteq \mathcal{G}(n,k)$ è aperto se e solo se $\Phi^{-1}(U)$ è aperto in $V(n,k)$.

Si può osservare subito che $\mathcal{G}(n,k)$ è compatto, in quanto quoziente di uno spazio compatto, ed è facile verificare che è uno spazio di Hausdorff

Proposizione 4.2. *$\mathcal{G}(n,k)$ è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Prendiamo $H, H' \in \mathcal{G}(n,k)$, e mostriamo che esiste una funzione continua $f : \mathcal{G}(n,k) \to \mathbb{R}$ tale che $f(H) \neq f(H')$; chiaramente questo è sufficiente, per trovare i due aperti che separano i punti basta prendere le controimmagini di due intorni aperti disgiunti di $f(H)$ e $f(H')$.

Prendiamo un vettore $v \in H \setminus H'$, e definiamo $f(K)$ come la norma della proiezione ortogonale di v sul sottospazio K. La funzione $f : \mathcal{G}(n,k) \to \mathbb{R}$ è continua perchè se prendiamo una base ortonormale $\{v_1,\ldots,v_k\}$ di K, allora si ha $f(K) = (\langle v, v_1\rangle^2 + \cdots + \langle v, v_k\rangle^2)^{1/2}$; inoltre il secondo membro dell'ultima uguaglianza è una funzione continua di $v_1,\ldots,v_k$, e dunque per le proprietà della topologia quoziente f è continua. Infine si ha $f(H) = \|v\| > f(H')$, e quindi abbiamo conluso. $\square$

Mostreremo nel seguito, quando verrà descritta la sua struttura di CW-complesso, che $\mathcal{G}(n,k)$ in effetti è una varietà topologica compatta di dimensione $2k(n-k)$.

Esempio 4.3. Nel caso $k = 1$ la Grassmaniana $\mathcal{G}(n,1)$ conicide con $\mathbb{P}^{n-1}$, che infatti non è altro che l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbb{C}^n$. Per vedere che anche le due topologie coincidono, basta notare che $V(n,1) = S^{2n-1}$ e che la topologia indotta dall'applicazione $V(n,1) \to \mathcal{G}(n,1)$ è la stessa che si ottiene vedendo $\mathbb{P}^{n-1}$ come quoziente di S^{2n-1}. Le Grassmaniane sono dunque una generalizzazione degli spazi proiettivi a sottospazi di dimensione più grande di 1.

Nel seguito ci occuperemo prevalentemente di una versione "limite" di questa costruzione, la *Grassmaniana infinita* dei sottospazi di dimensione k di $\mathbb{C}^\infty$, che viene costruita nel modo seguente.

Le inclusioni naturali tra gli spazi $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+h}$, date da $(x_1,\ldots,x_k) \longmapsto (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$, inducono chiaramente inclusioni tra le grassmaniane $\mathcal{G}(n,k) \subseteq \mathcal{G}(n+h,k)$. Fatte queste identificazioni, indichiamo con

$$\mathcal{G}_k = \mathcal{G}(\infty,k) = \bigcup_{n \geq k} \mathcal{G}(n,k)$$

che può essere visto come l'insieme dei sottospazi vettoriali k-dimensionali di $\mathbb{C}^\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{C}^n$, il sottoinsieme di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ costituito dalle successioni definitivamente nulle e dotato dell'usuale struttura di spazio vettoriale. Infatti un sottospazio k-dimensionale di $\mathbb{C}^\infty$ ha una base con un numero finito di elementi, che staranno tutti in un certo $\mathbb{C}^n$, e dunque tutto il sottospazio è contenuto in $\mathbb{C}^n$, cioè è un elemento di $\mathcal{G}(n,k)$.

Definizione 4.4. *La **Grassmaniana infinta** dei sottospazi di dimensione k di $\mathbb{C}^\infty$ è l'insieme $\mathcal{G}_k$ dotato della topologia di limite diretto indotta dalle inclusioni $\mathcal{G}(n,k) \subseteq \mathcal{G}(n+h,k)$.*

In altre parole un sottoinsieme $U \subseteq \mathcal{G}_k$ è aperto se e solo se $U \cap \mathcal{G}(n,k)$ è aperto in $\mathcal{G}(n,k)$ per ogni $n \geq k$.

Osservazione 4.5. È facile vedere, ripercorrendo la dimostrazione della proposizione 4.2, che anche $\mathcal{G}_k$ è uno spazio di Hausdorff per ogni k; infatti la funzione che ad $H \in \mathcal{G}_k$ associa la norma della proiezione su H di un vettore fissato è ancora continua, perchè è continua ristretta a tutti i $\mathcal{G}(n,k)$, e $\mathcal{G}_k$ ha la topologia di limite diretto rispetto a questi sottospazi.

Osservazione 4.6. Nel seguito verrà usata soltanto la struttura topologica delle Grassmaniane appena introdotte. Si può osservare però che esse hanno anche una naturale struttura differenziale e di varietà algebriche, e sono in effetti oggetti importanti e studiati anche in geometria differenziale e geometria algebrica.

4.2 Il fibrato tautologico

Passiamo ora a descrivere il fibrato tautologico sulle grassmaniane finite e infinite, che generalizza l'esempio 1.6.

Cominciamo con il caso finito. Supponiamo $n \geq k$ e poniamo $E(n,k) = \{(H,v) \in \mathcal{G}(n,k) \times \mathbb{C}^n : v \in H\} \subseteq \mathcal{G}(n,k) \times \mathbb{C}^n$ dotato della topologia quoziente, e $p_{n,k} : E(n,k) \to \mathcal{G}(n,k)$ la proiezione sul primo fattore, cioè $p_{n,k}(H,v) = H$.

Proposizione 4.7. *La tripla $\gamma_n^k = (E(n,k), p_{n,k}, \mathcal{G}(n,k))$ è un fibrato vettoriale per ogni $n \geq k$.*

Dimostrazione. L'unica cosa da verficare è che vale la proprietà di banalità locale.

Fissato un punto $H \in \mathcal{G}(n,k)$, indichiamo con $\pi : \mathbb{C}^n \to H$ la proiezione ortogonale sul sottospazio H e poniamo $U = \{H' \in \mathcal{G}(n,k) : \pi(H') \text{ ha dimensione } k\}$, un sottoinsieme di $\mathcal{G}(n,k)$ che contiene chiaramente H.

Mostreremo che U è un aperto e che l'applicazione $\phi : p_{n,k}^{-1}(U) \to U \times H \cong U \times \mathbb{C}^k$ definita da $\phi(H',v) = (H',\pi(v))$ è una banalizzazione locale.

Per definizione della topologia su $\mathcal{G}(n,k)$ il fatto che U sia aperto equivale al fatto che lo sia la sua controimmagine tramite l'applicazione $\Phi : V(n,k) \to \mathcal{G}(n,k)$, che è esattamente il sottoinsieme delle k-uple $(v_1,\dots,v_k)$ tali che i vettori $\pi(v_1),\dots,\pi(v_k)$ sono indipendenti. Se indichiamo con A la matrice che rappresenta l'applicazione π rispetto alla base standard in partenza e a una qualsiasi base nel codominio H, la condizione su $v_1,\dots,v_k$ è che il determinante della matrice $k \times k$ che ha come colonne i vettori $Av_1,\dots,Av_k$ sia non nullo. Poichè questo determinante è funzione continua di $v_1,\dots,v_k$ concludiamo che l'insieme delle k-uple $(v_1,\dots,v_k)$ che soddisfano la condizione sopra è aperto, e dunque la controimmagine di U in $V(n,k)$ è aperta, cioè U è aperto.

Passiamo al fatto che ϕ è una banalizzazione locale. Chiaramente vale $\pi_U \circ \phi = p_{n,k}$ dove $\pi_U : U \times H \to U$ è la proiezione sul primo fattore, e quindi l'unica cosa da verificare è che sia un omeomorfismo. Dalla definizione di U e di ϕ segue immediatamente che quest'ultima è una bigezione e un isomorfismo di spazi vettoriali ristretta a ogni fibra; rimane da controllare che è continua assieme alla sua inversa ϕ^{-1}.

Notiamo che per ogni $H' \in U$ esiste un'unica applicazione lineare invertibile $L'_H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ che si restringe a π sul sottospazio H' e all'identità su $H^\perp$. Verifichiamo che $L_{H'}$, che identifichiamo con la matrice $n \times n$ che la rappresenta nella base standard di $\mathbb{C}^n$, dipende in modo continuo da H'. Infatti possiamo scrivere $L_{H'} = AB^{-1}$, dove A e B sono applicazioni lineari opportune, precisamente: B manda la base standard di $\mathbb{C}^n$ ordinatamente nella base $v_1,\dots v_k, v_{k+1},\dots,v_n$, dove $v_1,\dots,v_k$ è una base ortonormale di H', e $v_{k+1},\dots,v_n$ è una base fissata di $H^\perp$, e A manda la base standard ordinatamente in $\pi(v_1),\dots,\pi(v_k),v_{k+1},\dots,v_n$. Ragionando per componenti è chiaro che entrambe A e B dipendono con continuità da $v_1,\dots,v_k$, e poichè moltiplicazione tra matrici e inversione sono applicazioni continue, anche $L_{H'}$ dipende con continuità da $v_1,\dots,v_k$. Poichè però $L_{H'}$ è definita solo in termini di H', e per le proprietà della topologia quoziente, segue che $L_{H'}$ dipende in modo continuo da H'.

Poichè a questo punto abbiamo $\phi(H',v) = (H',\pi(v)) = (H', L_{H'}(v))$, segue che ϕ è continua. Allo stesso modo si verifica che l'inversa è continua, notando che $\phi^{-1}(H',v) = (H', L_{H'}^{-1}(v))$. □

Definizione 4.8. *Il fibrato vettoriale γ_n^k è detto **fibrato tautologico** su $\mathcal{G}(n,k)$.*

L'aggettivo "tautologico" si riferisce, come accennato in precedenza, al fatto che la fibra sopra ogni punto H di $\mathcal{G}(n,k)$ è lo spazio vettoriale H stesso.

Nel caso della grassmaniana infinita si fa una costruzione analoga. Poniamo $E_k = \{(H,v) \in \mathcal{G}_k \times \mathbb{C}^\infty : v \in H\} \subseteq \mathcal{G}_k \times \mathbb{C}^\infty$ con la topologia di sottospazio, e definiamo $p_k : E_k \to \mathcal{G}_k$ come la restrizione della proiezione sul primo fattore.

Proposizione 4.9. *La tripla $\gamma^k = (E_k, p_k, \mathcal{G}_k)$ è un fibrato vettoriale.*

Dimostrazione. La proposizione è un'immediata conseguenza della dimostrazione della proposizione precedente, e del fatto che $\mathcal{G}_k$ ha la topologia di limite diretto. Infatti dato $H \in \mathcal{G}_k$ basta prendere gli aperti $U_n \subseteq \mathcal{G}(n,k)$ (per n sufficientemente grande, in modo che H sia contenuto in $\mathbb{C}^n$) trovati nella dimostrazione precedente, e porre $U = \bigcup_n U_n$. La banalizzazione locale ϕ si costruisce allo stesso modo usando le $\phi_n : p_{n,k}^{-1}(U_n) \to U_n \times H$ costruite in precedenza, che messe insieme danno una banalizzazione locale $\phi : p_k^{-1}(U) \to U \times H$ (la continuità segue dal fatto che $\mathcal{G}_k$ ha la topologia di limite diretto). □

Definizione 4.10. *Il fibrato vettoriale γ^k è detto **fibrato tautologico** su $\mathcal{G}_k$.*

Quest'ultimo fibrato viene chiamato anche *fibrato universale*, perchè ogni fibrato vettoriale di rango n è isomorfo al pullback di γ^n tramite una qualche funzione continua in $\mathcal{G}_n$.

Per dimostrare questo risultato servirà un lemma riguardante una proprietà degli spazi paracompatti, la cui dimostrazione si trova ad esempio in [2].

Lemma 4.11. *Se X è uno spazio paracompatto e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di X, allora esiste un ricoprimento aperto numerabile $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di X tale che ogni V_j è unione disgiunta di aperti, ciascuno contenuto in un qualche U_i. Inoltre esiste una partizione dell'unità $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq V_j$.*

Teorema 4.12. *Se $\xi = (E, p, X)$ è un fibrato vettoriale di rango n, allora esiste una funzione continua $f : X \to \mathcal{G}_n$ tale che $\xi \cong f^*(\gamma^n)$.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che è sufficiente trovare una funzione $f : E \to \mathbb{C}^\infty$ lineare e iniettiva su ogni fibra.

Infatti supponiamo di avere una tale f, e definiamo $g : X \to \mathcal{G}_n$ come $g(x) = f(E_x)$; notiamo che $f(E_x)$ è effettivamente un sottospazio vettoriale di dimensione n di $\mathbb{C}^\infty$ per le proprietà della funzione f. Consideriamo ora il pullback $g^*(\gamma^n)$, e mostriamo che è isomorfo a ξ, facendo vedere che ξ soddisfa la proprietà che caratterizza il pullback, e cioè che esiste una funzione continua $h : E \to E_n$ tale che $g \circ p = p_n \circ h$ e che sia un isomorfismo ristretta a ogni fibra.

Definiamo quindi $h : E \to E_n$ come $h(v) = (g(p(v)), f(v))$; osserviamo che quest'applicazione è effettivamente a valori in E_n perchè per costruzione $f(v) \in g(p(v))$. È ovvio che $g \circ p = p_n \circ h$, e dunque la coppia $(h, g) : \xi \to \gamma^n$ è un morfismo; è anche chiaro che h è un isomorfismo ristretto ad ogni fibra, per l'iniettività e linearità di f e per come è stata definita g. Dunque abbiamo effettivamente $\xi \cong g^*(\gamma^n)$.

Mostriamo ora che si trova $f : E \to \mathbb{C}^\infty$ lineare e iniettiva in ogni fibra. Prendiamo un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ tale che ξ sia banale su ogni U_i. Per la paracompattezza dello spazio base X possiamo applicare il lemma 4.11 al ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, e troviamo quindi un ricoprimento aperto numerabile $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tale che ξ è banale su ogni V_j, e una partizione dell'unità $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq V_j$. Definiamo a questo punto $g_j : p^{-1}(V_j) \to \mathbb{C}^n$ come la composizione della banalizzazione locale $\phi_j : p^{-1}(V_j) \to V_j \times \mathbb{C}^n$ con la proiezione sul secondo fattore, e notiamo che la funzione $v \longmapsto \varphi_j(p(v))g_j(v)$ si può estendere a una mappa $E \to \mathbb{C}^n$ ponendo che sia costantemente zero fuori da $p^{-1}(V_j)$. A questo punto, visto che "vicino" a ogni punto di X solo un numero finito di φ_j sono non nulle, e ce n'è almeno una, abbiamo che la funzione $f : E \to (\mathbb{C}^n)^\infty = \mathbb{C}^\infty$ definita come

$$f(v) = (\varphi_1(p(v))g_1(v), \varphi_2(p(v))g_2(v), \ldots, \varphi_k(p(v))g_k(v), \ldots)$$

è ben definita, e lineare e iniettiva in ogni fibra. $\square$

Osservazione 4.13. In realtà si può dimostrare, utilizzando anche il risultato già citato che pullbacks tramite mappe omotope sono isomorfi, che l'applicazione $[f] \longmapsto [f^*(\gamma^n)]$ è una bigezione tra $[X, \mathcal{G}_n]$, l'insieme delle classi di omotopia di applicazioni da X in $\mathcal{G}_n$, e $\operatorname{Vect}^n_{\mathbb{C}}(X)$.

Per questo $\mathcal{G}_n$ viene detto lo *spazio classificante* per i fibrati vettoriali di rango n, e una funzione $f : X \to \mathcal{G}_n$ tale che $f^*(\gamma^n) \cong \xi$ è detta *mappa classificante* per il fibrato ξ.

Osservazione 4.14. Il teorema precedente è importante tenendo presente gli assiomi con cui abbiamo introdotto le classi di Chern nel capitolo 2, e la definizione generale di classe caratteristica. Infatti per la proprietà di naturalità, se $\xi = f^*(\gamma^n)$ e c è una classe caratteristica sui fibrati di rango n, si ha che $c(\xi) = c(f^*(\gamma^n)) = f^*(c(\gamma^n))$, e dunque le classi caratteristiche sono totalmente determinate dal loro valore sul fibrato tautologico γ^n.

In particolare segue anche, come anticipato nell'osservazione 3.11, che l'anello delle classi caratteristiche di fibrati complessi di rango n con spazi base paracompatti a coefficienti in R è isomorfo all'anello $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; R)$. L'applicazione che inverte $c \longmapsto c(\gamma^n)$ è proprio quella che associa a $\sigma \in \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; R)$ la classe caratteristica che associa a un fibrato ξ la classe di coomologia $f^*(\sigma)$, dove f è la mappa classificante di ξ.

4.3 Esistenza e unicità delle classi di Chern

Accenniamo ora a una delle possibili costruzioni esplicite per le classi di Chern, e a una dimostrazione della loro unicità.

Useremo due risultati di topologia algebrica. Il primo è il teorema di Leray-Hirsch, che dà una descrizione della coomologia dello spazio totale di certi fibrati.

Teorema 4.15 (Leray-Hirsch). *Sia $\xi = (E, p, X)$ un fibrato a fibra F tale che:*

- $\mathrm{H}^i(F; \mathbb{Z})$ *è un gruppo abeliano libero finitamente generato per ogni $i \geq 0$*
- *esistono classi omogenee $x_j \in \mathrm{H}^*(E; \mathbb{Z})$ le cui restrizioni $\{i^*(x_j)\}$ formano una base di $\mathrm{H}^*(E_x; \mathbb{Z})$ per ogni $x \in X$, dove $i : E_x \hookrightarrow E$ è l'inclusione.*

Allora $\mathrm{H}^*(E; \mathbb{Z})$ è un $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z})$-modulo libero con base $\{x_j\}$.

La struttura di modulo è definita dalla moltiplicazione $ab = p^*(a)b$ per ogni $a \in \mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z})$ e $b \in \mathrm{H}^*(E; \mathbb{Z})$ (a secondo membro è sottointeso il prodotto cup).

Il secondo risultato che servirà è la descrizione della coomologia di $\mathbb{P}^n$ e di $\mathbb{P}^\infty = \mathcal{G}_1$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

Teorema 4.16.

- *L'anello di coomologia $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$ è isomorfo a un anello di polinomi $\mathbb{Z}[\sigma]$, dove $\sigma \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$ ha grado 2.*
- *L'anello di coomologia $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ è isomorfo al quoziente $\mathbb{Z}[\sigma_n]/I$, dove $\sigma_n \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ e I è l'ideale generato da $(\sigma_n)^{n+1}$.*

Inoltre l'inclusione $\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty$ induce inoltre un'applicazione suriettiva $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ che manda σ nel generatore σ_n di $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$.

Da questa descrizione si ricava in particolare che $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ è banale se i è dispari, mentre è isomorfo a $\mathbb{Z}$ se i è pari e $i \leq 2n$, e similmente per $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$.

Una dimostrazione di questi due risultati si può trovare ad esempio in [3].

Costruzione delle classi

Dato un fibrato vettoriale complesso $\xi = (E, p, X)$ di rango n, consideriamo il suo proiettivizzato $\mathbb{P}(\xi) = (F, q, X)$, e applichiamo a questo il teorema di Leray-Hirsch. Notiamo innanzitutto che dalla descrizione appena ricordata di $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z})$ si nota che la prima ipotesi del teorema è soddisfatta. Rimangono quindi da trovare delle classi omogenee $x_j \in \mathrm{H}^*(F; \mathbb{Z})$ che si restringano a una base di $\mathrm{H}^*(F_x; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z})$ in ogni fibra.

Per quanto visto nella sezione precedente, sappiamo che esiste un'applicazione lineare e iniettiva su ciascuna fibra $f : E \to \mathbb{C}^\infty$, che induce, passando ai quozienti, $g : F \to \mathbb{P}^\infty$. Prendiamo ora un generatore α di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$ che si restringa all'opposto del generatore scelto σ di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z})$ tramite l'identificazione usuale $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}^\infty$, e poniamo $x = g^*(\alpha) \in \mathrm{H}^2(F; \mathbb{Z})$. Le potenze $x^i \in \mathrm{H}^{2i}(F; \mathbb{Z})$ sono le classi che cercavamo.

Notiamo innanzitutto che non dipendono dalla scelta di f: infatti si può dimostrare (come viene fatto ad esempio in [2]) che due funzioni $f, f' : E \to \mathbb{C}^\infty$ lineari e iniettive su ogni fibra sono omotope tramite applicazioni con le stesse proprietà; questa omotopia passa quindi al quoziente, e dà un'omotopia tra le due applicazioni indotte $g, g' : F \to \mathbb{P}^\infty$ tramite cui è definito x. Infine, poichè funzioni omotope inducono lo stesso omomorfismo in coomologia, concludiamo che x non dipende da f.

Ora consideriamo una fibra F_x di $\mathbb{P}(\xi)$, l'inclusione $i : F_x \hookrightarrow F$ e un omeomorfismo $\phi : F_x \to \mathbb{P}^{n-1}$ che sia anche un'applicazione proiettiva (ad esempio può essere la restrizione di una banalizzazione locale). Abbiamo quindi il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} F_x \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & F \arrow[d, "g"'] \\ \mathbb{P}^{n-1} & \mathbb{P}^\infty \end{tikzcd}$$

La funzione $\mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^\infty$ che chiude il diagramma è iniettiva, ad esempio in quanto indotta da un'applicazione lineare iniettiva $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^\infty$; segue quindi che la funzione indotta in coomologia $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z})$ è surgettiva, e manda α in un generatore di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z})$, e di conseguenza α^i in un generatore di $\mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z})$. A questo punto scrivendo l'analogo del diagramma sopra per le applicazioni indotte in coomologia segue che le x^i si restringono a generatori di $\mathrm{H}^{2i}(F_x; \mathbb{Z})$ tramite la funzione indotta dall'inclusione. In particolare, ricordando anche la descrizione che abbiamo di $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z})$, segue che le classi $1, x, \ldots, x^{n-1} \in \mathrm{H}^*(F; \mathbb{Z})$ si restringono tramite l'inclusione a una base di $\mathrm{H}^*(F_x; \mathbb{Z})$ su ogni fibra di $\mathbb{P}(\xi)$.

Il teorema di Leray-Hirsch implica quindi che $\mathrm{H}^*(F; Z)$ è un $\mathrm{H}^*(X; Z)$-modulo libero, con base $1, x, \ldots, x^{n-1}$. In particolare x^n può essere scritto in modo unico come combinazione lineare a coefficienti in $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z})$ di elementi della base, $x^n = a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$.

Le classi di Chern di ξ sono proprio i coeffiecienti di questa scrittura a meno di un segno: si può dimostrare infatti che ponendo $c_i(\xi) = -a_i$ e $c_0(\xi) = 1$, $c_i(\xi) = 0$ per $i > n$, si ottiene un'associazione che soddisfa i quattro assiomi dati nel capitolo 2. Per la dimostrazione si veda [2], [7], oppure [4].

Unicità delle classi

Per provare l'unicità utilizziamo il seguente lemma:

Lemma 4.17. *Per ogni fibrato vettoriale $\xi = (E, p, X)$ di rango n esistono uno spazio topologico Y e una funzione $f : Y \to X$ tali che il pullback $f^*(\xi)$ si decompone come somma diretta di n fibrati di rango 1, e $f^* : \mathrm{H}^*(X; Z) \to \mathrm{H}^*(Y; \mathbb{Z})$ è iniettiva.*

Dimostrazione. Prendiamo il fibrato proiettivo $\mathbb{P}(\xi) = (F, q, X)$ associato a ξ, e consideriamo il pullback $q^*(\xi) = (G, r, F)$ di ξ tramite la proiezione q. Ricordiamo che lo spazio totale di $q^*(\xi)$ è $G = \{(l, v) \in F \times E : q(l) = p(v)\} \subseteq F \times E$, e per costruzione di pullback, la fibra di $q^*(\xi)$ sopra un punto $l \in F$ (dunque una retta in una fibra di ξ) è l'intera fibra di ξ sopra il punto $q(l) \in X$ (cioè la fibra di ξ che contiene la retta l).

Notiamo a questo punto che il fibrato $q^*(\xi)$ ha un sottofibrato "naturale" di rango 1, che indichiamo con η, con spazio totale $L = \{(l, v) \in F \times E : v \in l\}$ e proiezione la restrizione della proiezione di $q^*(\xi)$ (in pratica è il sottofibrato in cui ogni retta ha come fibra sè stessa). Il fatto che valga la proprietà di banalità locale si dimostra allo stesso modo che per il fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n$; ogni punto $l \in F$ ha un intorno U interamente contenuto nella fibra di $\mathbb{P}(\xi)$ in cui sta l, e questa è omeomorfa a $\mathbb{P}^{n-1}$. Dunque, a meno di questo omeomorfismo, il fibrato η ristretto ad U è proprio il fibrato tautologico su $\mathbb{P}^{n-1}$, ed è localmente banale per quanto già visto.

Ora ricordiamo che poichè lavoriamo con spazi paracompatti, ξ può essere dotato di una metrica Hermitiana, e questa, come abbiamo visto (osservazione 2.7), ne induce una sul pullback $q^*(\xi)$. La metrica indotta permette di decomporre $q^*(\xi)$ come somma diretta del sottofibrato η e del suo ortogonale, e scrivere quindi $q^*(\xi) = \eta \oplus \eta^\perp$, dove $\eta^\perp$ ha rango $n - 1$.

Come abbiamo visto inoltre, al fibrato $\mathbb{P}(\xi)$ si può applicare il teorema di Leray-Hirsch, che implica che $\mathrm{H}^*(F; \mathbb{Z})$ è un $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z})$-modulo libero con base $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ (con le stesse notazioni della discussione precedente). In particolare l'omomorfismo $q^* : \mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(F; \mathbb{Z})$ indotto in coomologia da $q : F \to X$ è iniettivo, poichè 1 è un elemento della base di $\mathrm{H}^*(F; \mathbb{Z})$.

Abbiamo quindi uno spazio topologico F e una funzione $q : F \to X$ tali che $q^*(\xi)$ si decompone in somma di due fibrati, η di rango 1 e $\eta^\perp$ di rango $n - 1$, e l'omomorfismo indotto $q^* : \mathrm{H}^*(X; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(F; \mathbb{Z})$ è iniettivo. Ripetendo la costruzione con il fibrato $\eta^\perp$ (che ha come spazio base F) al posto di ξ e iterandola altre $n - 2$ volte si ottengono Y e f come nella tesi. $\square$

Possiamo ora giustificare l'unicità delle classi di Chern.

Per prima cosa, gli assiomi 1 e 4 determinano completamente la classe del fibrato tautologico γ^1, che risulta essere $c(\gamma^1) = 1 + c_1(\gamma^1) = 1 + \sigma$. A questo punto, dato che, come abbiamo visto, tutti i fibrati di rango 1 sono pullback di γ^1, l'assioma 2 determina $c(\xi)$ per ogni fibrato ξ di rango 1; le classi sono quindi univocamente determinate anche per i fibrati che si decompongono in somma diretta di fibrati di rango 1, tramite l'assioma 3. Infine per il lemma appena dimostrato possiamo concludere che le classi sono determinate per tutti i fibrati.

Supponiamo infatti di avere due associazioni c_i e d_i che soddisfano i quattro assiomi, e prendiamo un fibrato $\xi = (E, p, X)$. Per il lemma esistono Y e $f : Y \to X$ tali che $f^*(\xi)$ si scrive come somma diretta di fibrati di rango 1 e $f^* : \mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(Y;\mathbb{Z})$ è iniettiva. Per l'assioma 2 allora, si ha $c_i(f^*(\xi)) = f^*(c_i(\xi))$ e $d_i(f^*(\xi)) = f^*(d_i(\xi))$ per ogni i; ma abbiamo già concluso che le classi sono uniche sui fibrati che si decompongono in somma diretta di fibrati di rango 1, e dunque $c_i(f^*(\xi)) = d_i(f^*(\xi))$, cioè $f^*(c_i(\xi)) = f^*(d_i(\xi))$, per ogni i. Per iniettività dell'omomorfismo f^* abbiamo allora che $c_i(\xi) = d_i(\xi)$ per ogni i, e dunque le due associazioni conicidono sul fibrato ξ.

Conludiamo quindi che i quattro assiomi dati nel capitolo 2 determinano le classi di Chern per tutti i fibrati vettoriali.

4.4 Scomposizione in celle

Allo scopo di calcolare la coomologia della Grassmaniana $\mathcal{G}_n$ sarà utile avere una limitazione superiore sul rango di $\mathrm{H}^i(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$. Un modo per avere una stima di questo tipo è descrivere la struttura di CW-complesso di $\mathcal{G}_n$.

Per fare questo, ricordiamo alcuni fatti basilari di algebra lineare: data una matrice A di rango k con k righe e n colonne, con $k \leq n$, questa si può sempre mettere in una forma analoga alla seguente

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & 1 \end{pmatrix}$$

applicando un procediento di riduzione "alla Gauss", cioè sommando tra loro multipli delle righe, moltiplicando le righe per uno scalare non nullo, o scambiandole a due a due. Nel seguito questa forma verrà chiamata semplicemente *forma triangolare inferiore*. Indichiamo inoltre con $\sigma_1 < \cdots < \sigma_k$ i numeri delle colonne in cui si trovano i "pivots", cioè le prime entrate non nulle che si incontrano in ogni riga scorrendo gli elementi da sinistra. La k-upla $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ viene indicata con $\sigma(A)$, e chiamata il *simbolo di Schubert* associato ad A. È un fatto noto di algebra lineare che i numeri $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ non dipendono dalla riduzione in forma triangolare inferiore, e dunque $\sigma(A)$ è effettivamente ben definito.

Utilizziamo questa definizione per introdurre quelle che saranno le celle della scomposizione in CW-complesso di $\mathcal{G}(n,k)$. Dato $\sigma = (\sigma, \dots, \sigma_k)$ con $1 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_k \leq n$ indichiamo con $e(\sigma)$ l'insieme dei sottospazi H di dimensione k di $\mathbb{C}^n$ tali che la matrice che ha come righe i vettori di una qualsiasi base di H abbia σ come simbolo di Schubert; equivalentemente si può dire che, se indichiamo con $\pi_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-i}$ la proiezione sulle ultime $n - i$ coordinate, la dimensione di $\pi_i(H)$ cala passando da i a $i + 1$ esattamente in corrispondenza degli indici σ_j. È chiaro che al variare di σ questi sottoinsiemi ricoprono tutto $\mathcal{G}(n,k)$.

Ovviamente le matrici in forma triangolare inferiore sono parametrizzate dalle entrate arbitrarie (gli asterischi nell'esempio di prima), che sono in tutto $m = (\sigma_1 - 1) + \cdots + (\sigma_k - k)$. Notato questo è facile verificare che $e(\sigma)$ è omeomorfo a $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$, tramite la funzione $f : \mathbb{C}^m \to e(\sigma)$ che associa a una m-upla di numeri complessi $(x_1, \ldots, x_m)$ il sottospazio k-dimensionale di $\mathbb{C}^n$ generato dalle righe della matrice in forma triangolare inferiore associata a $(x_1, \ldots, x_m)$. Dunque topologicamente $e(\sigma)$ è una cella aperta di dimensione $2m = 2((\sigma_1 - 1) + \cdots + (\sigma_k - k))$.

Proposizione 4.18. *Le celle $e(\sigma)$ al variare dei possibili σ sono le celle di una struttura di CW-complesso di $\mathcal{G}(n, k)$.*

Ricordiamo brevemente che un CW-complesso è uno spazio topologico X con una successione di sottospazi $X_i \subseteq X$ per $i \in \mathbb{N}$ tali che:

- X_0 è un insieme discreto.
- X_i per $i > 1$ si ottiene da X_{i-1} attaccando delle i-celle e^i_α (indicizzate da un certo insieme A_i) tramite applicazioni $\varphi_\alpha : S^{i-1} \to X_{i-1}$, dette *mappe caratteristiche*; in altre parole X_i è omeomorfo al quoziente dell'unione disgiunta $X_{i-1} \coprod_\alpha D^i_\alpha$, dove D^i_α sono i-celle, per la relazione di equivalenza che identifica $x \in \partial D^i_\alpha$ con $\varphi_\alpha(x) \in X^{i-1}$ per ogni $\alpha \in A_i$, e insiemisticamente si ha $X_i = X_{i-1} \coprod_\alpha e^i_\alpha$, dove e^i_α sono sottoinsiemi di X omeomorfi a i-celle aperte.
- Infine, o si ha $X = X_n$ per un certo n, oppure (insiemisticamente) $X = \bigcup_i X_i$, e la topologia di X coincide con la topologia di limite diretto, cioè $A \subseteq X$ è aperto se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i per ogni i.

In particolare dunque ogni X_n è un CW-complesso contenuto in X, che viene detto l'*n-scheletro* di X. Si dice anche che gli X_n sono *sottocomplessi* di X.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che $e(\sigma) \subseteq \mathcal{G}(n, k)$ è un sottoinsieme omeomorfo a una cella aperta per ogni possibile σ. Il punto principale della dimostrazione è dunque descrivere le mappe caratteristiche delle celle $e(\sigma)$; fissiamo quindi nel seguito una k-upla di naturali positivi $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, e condieriamo sottospazi $H \in e(\sigma)$.

Per trovare le mappe caratteristiche utilizziamo una forma leggermente diversa da quella descritta un precedenza per la matrice "associata" a un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ (cioè la forma triangolare inferiore della matrice che ha come righe i vettori di una base di tale sottospazio): precisamente permettiamo che gli 1 in corrispondenza dei pivots e gli zeri sottostanti siano invece numeri complessi arbitrari, e richiediamo però che le righe siano vettori ortonormali, e che l'ultima entrata non nulla in ogni riga sia reale e positiva. Nel seguito questa forma verrà chiamata la *forma triangolare inferiore ortonormale*. Notiamo che c'è un'unica matrice di questa forma associata a un elemento H di $\mathcal{G}(n,k)$; infatti se indichiamo con H_i il sottospazio di H generato dalle prime i righe della forma triangolare inferiore, allora c'è un unico vettore di norma 1 in H_i ortogonale a H_{i-1} e con la σ_i-esima coordinata reale e positiva.

L'i-esima riga della forma triangolare inferiore ortonormale associata a un sottospazio $H \in \mathcal{G}(n,k)$ è un elemento del sottoinsieme di $S^{2\sigma_i-1}$ costituito dai vettori che hanno la σ_i-esima coordinata reale e non negativa, e tutte le successive nulle; d'ora in poi indichiamo tale insieme con A_i per $i = 1,\dots,k$. Notiamo inoltre che A_i è chiaramente omeomorfo a una cella di dimensione $2\sigma_i - 2$ per ogni i.

Indichiamo ora con $E(\sigma)$ il sottospazio di $V(n,k)$ costituito dalle k-uple $(v_1,\dots,v_k)$ tali che $v_i \in A_i$ per ogni $i = 1,\dots,k$, e mostriamo che è omeomorfo a una cella chiusa.

Definiamo un'applicazione

$$f : E(\sigma) \to A_1 \times \{(v_1,\dots,v_k) \in E(\sigma) : v_1 = w\}$$

dove $w = (0,\dots,0,1,0\dots,0) \in A_1$ ha un 1 in posizione σ_1, e altrove zeri, come

$$f(v_1,\dots,v_k) = (v_1, \rho_{v_1}(v_1), \rho_{v_1}(v_2),\dots,\rho_{v_1}(v_k))$$

dove ρ_{v_1} è l'elemento di $SU(n)$ che manda v_1 in w e fissa l'ortogonale a questi due vettori. In particolare ρ_{v_1} lascia fisso A_i per $i > 1$ (perchè modifica solo le prime σ_1 coordinate), e dunque f è ben defInta. Inoltre f è chiaramente continua, ed è facile verficare che è bigettiva. Infine, poichè il dominio è compatto e il codominio è uno spazio di Hausdorff, f è un omeomorfismo.

Notiamo a questo punto che $\{(v_1,\dots,v_k) \in E(\sigma) : v_1 = w\}$ può essere identificato con $E(\sigma')$, dove $\sigma' = (\sigma_2-1,\dots,\sigma_k-1)$, tramite la funzione che manda la k-upla $(v_1,\dots,v_k)$ in $(v'_2,\dots,v'_k)$, dove v'_i è il vettore ottenuto da v_i cancellando la σ_1-esima coordinata; in pratica la condizione di essere ortogonali a w si traduce nel fatto che i vettori $v_2,\dots,v_k$ hanno la σ_1-esima coordinata nulla, che quindi "toglie un parametro".

Ragionando per induzione su k possiamo quindi supporre che $E(\sigma')$ sia omoeomorfo a una cella di dimensione $2(\sigma_2 - 2) + \cdots + 2(\sigma_k - k)$ (il caso base $k = 1$ è banalmente verificato, visto che in quel caso $E(\sigma)$ conicide con A_i, che è omeomorfo a una cella di dimensione $2\sigma_1 - 2$). Poichè infine se D_1 e D_2 sono celle di dimensione n_1 e n_2, allora $D_1 \times D_2$ è una cella di dimensione n_1+n_2, segue che $E(\sigma)$ è omeomorfo a una cella di dimensione $2(\sigma_1 - 1) + \cdots + 2(\sigma_k - k)$.

È anche facile verificare, sempre procedendo induttivamente, che il bordo di $E(\sigma)$ è costituito dalle k-uple $(v_1,\dots,v_k)$ con almeno un $v_i \in \partial A_i$ (cioè con la σ_i-esima coordinata nulla).

Ora che abbiamo la cella chiusa corrispondente a $e(\sigma)$, introduciamo la mappa caratteristica: consideriamo la restrizione dell'applicazione $\Phi : V(n,k) \to \mathcal{G}(n,k)$ al sottoinsieme $E(\sigma)$. Questa porta l'interno di $E(\sigma)$ bigettivamente in $e(\sigma)$, e ristretta all'interno è un omeomorfismo perchè $\mathcal{G}(n,k)$ ha proprio la topologia indotta da Φ. Inoltre il bordo di $E(\sigma)$ viene mandato su celle $e(\sigma') \subseteq \mathcal{G}(n,k)$ di dimensione più bassa (perchè si ottengono diminuendo qualche σ_i).

Possiamo finalmente concludere che le $e(\sigma)$ sono le celle di una struttura di CW-complesso per $\mathcal{G}(n,k)$. Indichiamo con X_i l'unione delle $e(\sigma)$ di dimensione al più i, e supponiamo induttivamente che X_i sia un CW-complesso con celle $e(\sigma)$ e mappe caratteristiche le restrizioni di Φ (al passo base non c'è nulla da verificare, visto che c'è una sola cella di dimensione 0). Attaccando le $(i+1)$-celle di X_{i+1} a X_i tramite le restrizioni di Φ ai bordi di tali celle si ottiene quindi un CW-complesso Y, con una bigezione continua da Y a X_{i+1}. Ora Y è compatto essendo un CW-complesso finito (il numero di celle che si aggiunge ad ogni passo è chiaramente finito), e X_{i+1} è uno spazio di Hausdorff poichè è un sottospazio di $\mathcal{G}(n,k)$; segue dunque che la mappa $Y \to X_{i+1}$ è in realtà un omeomorfismo.

Questo dimostra che ogni X_i è un CW-complesso, e dunque in particolare lo sarà $\mathcal{G}(n,k) = X_m$ (dove m è il massimo delle dimensioni delle celle, che sono in numero finito), con la scomposizione in celle vista. $\square$

È chiaro da questa descrizione che le inclusioni $\mathcal{G}(n,k) \subseteq \mathcal{G}(n+h,k)$ sono inclusioni di sottocomplessi, e poichè $\mathcal{G}_n$ ha la topologia di limite diretto rispetto a questi sottospazi, possiamo concludere che anche $\mathcal{G}_n$ è un CW-complesso, le cui celle sono le $e(\sigma)$ descritte in precedenza.

Osservazione 4.19. Dalla scomposizione in celle trovata segue che $\mathcal{G}(n,k)$ è una varietà topologica di dimensione $2k(n-k)$. Infatti la cella di dimensione più alta è $e(\sigma)$, con $\sigma = (n-k+1, \ldots, n)$, di dimensione $2k(n-k)$, e in un intorno di ogni punto di questa cella $\mathcal{G}(n,k)$ è una varietà della dimensione giusta. Ma è facile verificare che $\mathcal{G}(n,k)$ è uno spazio omogeneo: dati H e H' sottospazi di dimensione k di $\mathbb{C}^n$ c'è un omeomorfismo che manda H in H', indotto da un qualsiasi automorfismo di $\mathbb{C}^n$ che mandi H in H'.

Dunque possiamo concludere che $\mathcal{G}(n,k)$ è una varietà topologica compatta di dimensione $2k(n-k)$.

4.5 Coomologia della Grassmaniana

Come anticipato più volte, arriviamo finalmente alla descrizione dell'anello di coomologia della grassmaniana complessa infinita $\mathcal{G}_n$, che risulta essere un anello polinomiale generato dalle classi di Chern del fibrato tautologico γ^n.

Teorema 4.20. *Si ha* $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n]$, *dove* $c_i = c_i(\gamma^n)$ *sono le classi di Chern del fibrato tautologico.*

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due passi.

$\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$ **contiene una sottoalgebra isomorfa a** $\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n]$.

Cominciamo a considerare il prodotto cartesiano $\xi = \gamma^1 \times \dots \times \gamma^1$ del fibrato tautologico di rango 1, con n fattori. Questo è un fibrato di rango n, con spazio base $(\mathbb{P}^\infty)^n$, isomorfo alla somma diretta $\pi_1^*(\gamma^1) \oplus \dots \oplus \pi_n^*(\gamma^1)$, dove $\pi_i : (\mathbb{P}^\infty)^n \to \mathbb{P}^\infty$ è la proiezione sull'i-esimo fattore. Ricordando che $c_1(\gamma^1)$ è un generatore di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1;\mathbb{Z})$, cioè un generatore di $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^\infty;\mathbb{Z})$, e usando la formula per la classe di Chern totale di una somma diretta e la naturalità, si ha che

$$\begin{aligned} c(\xi) &= \prod_{i=1}^n c(\pi_i^*(\gamma^1)) = \prod_{i=1}^n \pi_i^*(c(\gamma^1)) = \prod_{i=1}^n \pi_i^*(1 + c_1(\gamma^1)) \\ &= \prod_{i=1}^n (1+\alpha_i) \in \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_n] \cong \mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n;\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

dove α_i sono le immagini tramite π_i^* del generatore di $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^\infty;\mathbb{Z})$. Da quest'uguaglianza segue che $c_i(\xi)$ è l'i-esimo polinomio simmetrico elementare nelle α_j.

Sia ora $f : (\mathbb{P}^\infty)^n \to \mathcal{G}_n$ una mappa classificante per il fibrato ξ. Per naturalità delle classi di Chern la composizione

$$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n] \to \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$$

dove la prima freccia rappresenta l'omomorfismo di valutazione definito da $p \longmapsto p(c_1,\dots,c_n)$, manda x_i nell'i-esimo polinomio simmetrico elementare nelle α_j, ed è un fatto noto che tali polinomi sono algebricamente indipendenti (una dimostrazione si può trovare nel classico [5]). Da questo segue che la composizione $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ è iniettiva, e dunque lo è anche la mappa $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n] \to \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$. L'immagine di $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ in $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z})$ è dunque una sottoalgebra isomorfa a $\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n]$ (in pratica tra le c_i non ci sono relazioni algebriche a coefficienti in $\mathbb{Z}$).

Si ha effettivamente $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n]$.

Osserviamo innanzitutto che se $f : (\mathbb{P}^\infty)^n \to \mathcal{G}_n$ è come sopra, l'immagine di f^* in $\mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ consiste esattamente dei polinomi simmetrici negli α_j. Abbiamo già visto che questi ultimi appartengono a $f^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n;\mathbb{Z}))$; l'inclusione opposta segue dal fatto che se

$\pi : (\mathbb{P}^\infty)^n \to (\mathbb{P}^\infty)^n$ è una qualsiasi permutazione dei fattori, allora il pull-back di $\xi = (\gamma^1)^n$ tramite π è isomorfo a ξ stesso, e dunque, per i risultati citati nell'osservazione 4.13, si ha che f e $f \circ \pi$ sono omotope. Segue quindi in particolare che $f^* = \pi^* \circ f^*$, e dunque l'immagine di f^* è invariante per π^*, che non è altro che la stessa permutazione π applicata alle α_j. Da questo segue che ogni elemento dell'immagine di f^* è un polinomio simmetrico in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Per concludere la dimostrazione basta dunque far vedere che f^* è iniettiva, perchè sappiamo già che $f^*(\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n])$ coincide con l'immagine di f^*, e cioè con l'insieme dei polinomi simmetrici nelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Per provare che l'iniettività di f^* utilizzeremo la scomposizione in celle di $\mathcal{G}_n$ descritta nella sezione precedente. Osserviamo infatti che è sufficiente dimostrare che nella struttura di CW-complesso trovata, che ricordiamo avere solo celle di dimensione pari, le celle di dimensione $2i$ sono in corrispondenza biunivoca con i monomi di grado $2i$ di $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ della forma $c_1^{r_1} \cdots c_n^{r_n}$, dove $2i = 2r_1 + \cdots + 2nr_n$.

Supponiamo infatti di avere dimostrato che c'è questa bigezione. Poichè il numero di k-celle in un CW-complesso X costituisce una limitazione superiore per il rango di $\mathrm{H}^k(X; \mathbb{Z})$, abbiamo che il rango di $\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ è minore o uguale del numero di $2i$-celle di $\mathcal{G}_n$, che d'altra parte è uguale al rango di $f^*(\mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z}))$ (perchè quest'ultimo coincide con il numero di monomi di grado $2i$ nelle c_i della forma scritta sopra, essendo f^* iniettiva ristretta a $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$). Inoltre è un fatto noto (una cui dimostrazione si può trovare ad esempio in [1]) che un omomorfismo surgettivo tra gruppi abeliani liberi di rango finito è iniettivo se il rango del dominio non supera quello del codominio.

Mettendo insieme queste osservazioni troviamo che la funzione $f^* : \mathrm{H}^{2i}(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2i}((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z})$ è iniettiva; da questo e dal fatto che il gruppo $\mathrm{H}^{2i+1}(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ è banale per ogni $i \geq 0$ (perchè non ci sono celle di dimensione dispari nella scomposizione in CW-complesso di $\mathcal{G}_n$) segue che f^* è iniettiva anche da $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ in $\mathrm{H}^*((\mathbb{P}^\infty)^n; \mathbb{Z})$.

Mostriamo infine che celle e monomi sono in corrispondenza biunivoca: le n-uple $(r_1, \ldots, r_n)$ con $2i = 2r_1 + \cdots + 2nr_n$ (che corrispondono ai monomi della forma $c_1^{r_1} \cdots c_n^{r_n}$ con $2i = 2r_1 + \cdots + 2nr_n$) sono chiaramente in bigezione con le partizioni di i in al più n interi, tramite l'associazione

$$(r_1, \ldots, r_n) \longrightarrow r_n \leq r_n + r_{n-1} \leq \cdots \leq r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1.$$

Ponendo $\sigma_i = r_n + r_{n-1} + \ldots + r_{n-i+1} + i$ otteniamo inoltre una corrispondenza biunivoca tra tali partizioni e le n-uple $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ tali che $0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ e $(\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \cdots + (\sigma_n - n) = i$. Infine sappiamo che per ognuna di queste n-uple c'è esattamente una cella nella scomposizione di $\mathcal{G}_n$, di dimensione proprio $2((\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \cdots + (\sigma_n - n)) = 2i$.

Dunque abbiamo la bigezione cercata e quindi, per quanto già detto, abbiamo conluso. □

Osservazione 4.21. Dall'ultimo teorema e dai commenti precedenti sul legame tra l'anello delle classi caratteristiche e $\mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; R)$ segue facilmente una caratterizzazione delle classi caratteristiche a coefficienti in $\mathbb{Z}$; precisamente queste sono tutte polinomi a coefficienti interi nelle classi di Chern c_i.

Infatti una classe caratteristica è determinata da una classe di coomologia $\sigma \in \mathrm{H}^*(\mathcal{G}_n; \mathbb{Z})$ tramite $c(\xi) = f^*(\sigma)$, dove f è la mappa classificante di ξ. Ma per quanto appena dimostrato sulla coomologia di $\mathcal{G}_n$ abbiamo che $\sigma = p(c_1(\gamma^n), \ldots, c_n(\gamma^n))$ per un certo polinomio p a coeffiecienti interi. Ma allora segue che

$$\begin{aligned} c(\xi) &= f^*(p(c_1(\gamma^n), \ldots, c_n(\gamma^n))) = p(f^*(c_1(\gamma^n)), \ldots, f^*(c_n(\gamma^n))) \\ &= p(c_1(\xi), \ldots, c_n(\xi)) \end{aligned}$$

da cui $c = p(c_1, \ldots, c_n)$.

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah, I. G. Mc Donald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] A. Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*,
http://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VBpage.html

[3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[4] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer, 1966.

[5] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1971.

[6] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2003.

[7] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1974.