Teoria della deformazione

Mattia Talpo

24 Luglio 2009

Introduzione

Teoria della deformazione: studio locale di famiglie di oggetti.

Oggetti=schemi, con eventuale struttura aggiuntiva: punti marcati, sottoschemi chiusi, fasci, fibrati, ...
Famiglie=morfismi $f : X \to S$, con eventuale struttura aggiuntiva su X
Studio locale=locale nella base S: fissato un oggetto X_0 si studiano famiglie $f : X \to S$ con $s_0 \in S$ e $f^{-1}(s_0) \cong X_0$ (deformazioni di X_0)

Introduzione

Teoria della deformazione: studio locale di famiglie di oggetti.

Oggetti=schemi, con eventuale struttura aggiuntiva: punti marcati, sottoschemi chiusi, fasci, fibrati, ...
Famiglie=morfismi $f : X \to S$, con eventuale struttura aggiuntiva su X
Studio locale=locale nella base S: fissato un oggetto X_0 si studiano famiglie $f : X \to S$ con $s_0 \in S$ e $f^{-1}(s_0) \cong X_0$ (deformazioni di X_0)

Introduzione

Teoria della deformazione: studio locale di famiglie di oggetti.

Oggetti=schemi, con eventuale struttura aggiuntiva: punti marcati, sottoschemi chiusi, fasci, fibrati, ...

Famiglie=morfismi $f : X \to S$, con eventuale struttura aggiuntiva su X

Studio locale=locale nella base S: fissato un oggetto X_0 si studiano famiglie $f : X \to S$ con $s_0 \in S$ e $f^{-1}(s_0) \cong X_0$ (deformazioni di X_0)

Introduzione

Teoria della deformazione: studio locale di famiglie di oggetti.

Oggetti=schemi, con eventuale struttura aggiuntiva: punti marcati, sottoschemi chiusi, fasci, fibrati, ...
Famiglie=morfismi $f : X \to S$, con eventuale struttura aggiuntiva su X
Studio locale=locale nella base S: fissato un oggetto X_0 si studiano famiglie $f : X \to S$ con $s_0 \in S$ e $f^{-1}(s_0) \cong X_0$ (deformazioni di X_0)

Applicazioni allo studio di spazi (stacks) di moduli (famiglie di oggetti parametrizzati da $M \leftrightarrow$ morfismi verso M).

Nasce alla fine degli anni '50 con i lavori di Kodaira e Spencer (nel caso di varietà complesse), e viene riformulata in un linguaggio più generale dalla scuola di Grothendieck. Studiata in particolare da Schlessinger (funtori di deformazione) e Rim (categorie fibrate).

Obiettivo=riscrivere in modo sistematico parte della teoria usando categorie fibrate al posto di funtori. Questo permette di tenere traccia degli automorfismi degli oggetti, e alcune condizioni divengono più naturali.

Applicazioni allo studio di spazi (stacks) di moduli (famiglie di oggetti parametrizzati da $M \leftrightarrow$ morfismi verso M).

Nasce alla fine degli anni '50 con i lavori di Kodaira e Spencer (nel caso di varietà complesse), e viene riformulata in un linguaggio più generale dalla scuola di Grothendieck. Studiata in particolare da Schlessinger (funtori di deformazione) e Rim (categorie fibrate).

Obiettivo=riscrivere in modo sistematico parte della teoria usando categorie fibrate al posto di funtori. Questo permette di tenere traccia degli automorfismi degli oggetti, e alcune condizioni divengono più naturali.

Applicazioni allo studio di spazi (stacks) di moduli (famiglie di oggetti parametrizzati da $M \leftrightarrow$ morfismi verso M).

Nasce alla fine degli anni '50 con i lavori di Kodaira e Spencer (nel caso di varietà complesse), e viene riformulata in un linguaggio più generale dalla scuola di Grothendieck. Studiata in particolare da Schlessinger (funtori di deformazione) e Rim (categorie fibrate).

Obiettivo=riscrivere in modo sistematico parte della teoria usando categorie fibrate al posto di funtori. Questo permette di tenere traccia degli automorfismi degli oggetti, e alcune condizioni divengono più naturali.

Deformazioni di schemi

X_0 schema proprio su k.

Definizione

Una deformazione di X_0 è un morfismo di schemi $f : X \to S$ proprio e piatto, con un punto $s_0 \in S(k)$ e un isomorfismo $f^{-1}(s_0) \cong X_0$.

Le fibre di f su punti k-razionali di S si possono pensare come schemi su k ottenuti "perturbando" X_0.

Definizione

Un isomorfismo tra due deformazioni $f : X \to S$ e $g : Y \to S$ di X_0 è un isomorfismo $F : X \to Y$ di schemi su S che induce l'identità sulla fibra isomorfa a X_0.

Le deformazioni di X_0 su S formano una categoria $\mathcal{D}ef_{X_0}(S)$.

Deformazioni di schemi

X_0 schema proprio su k.

Definizione

Una deformazione di X_0 è un morfismo di schemi $f : X \to S$ proprio e piatto, con un punto $s_0 \in S(k)$ e un isomorfismo $f^{-1}(s_0) \cong X_0$.

Le fibre di f su punti k-razionali di S si possono pensare come schemi su k ottenuti "perturbando" X_0.

Definizione

Un isomorfismo tra due deformazioni $f : X \to S$ e $g : Y \to S$ di X_0 è un isomorfismo $F : X \to Y$ di schemi su S che induce l'identità sulla fibra isomorfa a X_0.

Le deformazioni di X_0 su S formano una categoria $\mathcal{D}ef_{X_0}(S)$.

C'è una nozione naturale di pullback rispetto allo schema base S:
se $\varphi : T \to S$ è un morfismo di schemi su k e $f : X \to S$ è una deformazione di X_0, il morfismo indotto $X \times_S T \to T$ dà una deformazione di X_0 su T.
Questo dà un funtore $\varphi^* : \mathcal{D}ef_{X_0}(S) \to \mathcal{D}ef_{X_0}(T)$.

Le varie categorie $\mathcal{D}ef_{X_0}(S)$ con S schema su k si possono "mettere insieme" in un'unica categoria $\mathcal{D}ef_{X_0}$, che ha un funtore dimenticante $\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{PSch}/k)$, e la cui "fibra" su S è $\mathcal{D}ef_{X_0}(S)$.

$\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{PSch}/k)$ è una categoria fibrata in gruppodi.

C'è una nozione naturale di pullback rispetto allo schema base S:
se $\varphi : T \to S$ è un morfismo di schemi su k e $f : X \to S$ è una deformazione di X_0, il morfismo indotto $X \times_S T \to T$ dà una deformazione di X_0 su T.
Questo dà un funtore $\varphi^* : \mathcal{D}ef_{X_0}(S) \to \mathcal{D}ef_{X_0}(T)$.

Le varie categorie $\mathcal{D}ef_{X_0}(S)$ con S schema su k si possono "mettere insieme" in un'unica categoria $\mathcal{D}ef_{X_0}$, che ha un funtore dimenticante $\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{PSch}\,/k)$, e la cui "fibra" su S è $\mathcal{D}ef_{X_0}(S)$.

$\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{PSch}\,/k)$ è una categoria fibrata in gruppodi.

Deformazioni infinitesime

Definizione

Una deformazione $f : X \to S$ si dice infinitesima se $S = \mathrm{Spec}(A)$, dove A è una k-algebra artiniana locale, con campo residuo k, e del prim'ordine se $A = k[\varepsilon] = k[t]/(t^2)$.

In questo caso topologicamente $X = X_0$, e cambia solo il fascio strutturale.

Studio infinitesimo: si restringe $\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{PSch}/k)$ alla sottocategoria $(\mathrm{Art}/k)^{op}$ delle k-algebre artiniane locali con campo residuo k.

Deformazioni infinitesime

Definizione

Una deformazione $f : X \to S$ *si dice* ***infinitesima*** *se* $S = \mathrm{Spec}(A)$, *dove* A *è una* k*-algebra artiniana locale, con campo residuo* k, *e* ***del prim'ordine*** *se* $A = k[\varepsilon] = k[t]/(t^2)$.

In questo caso topologicamente $X = X_0$, e cambia solo il fascio strutturale.

Studio infinitesimo: si restringe $\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{PSch}\,/k)$ alla sottocategoria $(\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ delle k-algebre artiniane locali con campo residuo k.

Definizione

Il ***funtore di deformazione*** *associato a X_0 è* $\mathrm{Def}_{X_0} : (\mathrm{Art}/k) \to (\mathrm{Set})$ *dato da*

$$A \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \textit{classi di isomorfismo} \\ \textit{di deformazioni } X \to \mathrm{Spec}(A) \textit{ di } X_0 \end{array} \right\}.$$

(covariante, perchè un omomorfismo di anelli $A \to B$ corrisponde a un morfismo $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$)

Ottenuto prendendo classi di isomorfismo nella categoria fibra su A di $\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{Art}/k)^{op}$.
La stessa cosa succede sistematicamente quando si codifica un problema di deformazione in un funtore. Così facendo si trascurano gli automorfismi degli oggetti, che possono essere importanti in certi contesti.

Definizione

Il funtore di deformazione associato a X_0 è $\mathrm{Def}_{X_0} : (\mathrm{Art}\,/k) \to (\mathrm{Set})$ *dato da*

$$A \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \textit{classi di isomorfismo} \\ \textit{di deformazioni } X \to \mathrm{Spec}(A) \textit{ di } X_0 \end{array} \right\}.$$

(covariante, perchè un omomorfismo di anelli $A \to B$ corrisponde a un morfismo $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$)

Ottenuto prendendo classi di isomorfismo nella categoria fibra su A di $\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$.
La stessa cosa succede sistematicamente quando si codifica un problema di deformazione in un funtore. Così facendo si trascurano gli automorfismi degli oggetti, che possono essere importanti in certi contesti.

Schlessinger ha studiato le proprietà astratte di funtori di questo tipo.

Definizione

Un funtore di deformazione è un funtore $F : (\mathrm{Art}\,/k) \to (\mathrm{Set})$ tale che $F(k)$ sia un singoletto.

L'elemento di $F(k)$ è l'oggetto che viene deformato, e gli elementi di $F(A)$ sono (classi di isomorfismo di) sue deformazioni su $\mathrm{Spec}(A)$.

Al posto di un funtore $F : (\mathrm{Art}\,/k) \to (\mathrm{Set})$, consideriamo categorie fibrate in gruppoidi $\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$.

Schlessinger ha studiato le proprietà astratte di funtori di questo tipo.

Definizione

Un funtore di deformazione è un funtore $F : (\mathrm{Art}\,/k) \to (\mathrm{Set})$ tale che $F(k)$ sia un singoletto.

L'elemento di $F(k)$ è l'oggetto che viene deformato, e gli elementi di $F(A)$ sono (classi di isomorfismo di) sue deformazioni su $\mathrm{Spec}(A)$.

Al posto di un funtore $F : (\mathrm{Art}\,/k) \to (\mathrm{Set})$, consideriamo categorie fibrate in gruppoidi $\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$.

Categorie fibrate in gruppoidi

Consideriamo una categoria $\mathcal{F}$ con un funtore $p : \mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/\,k)^{op}$.

Definizione

Una freccia $\xi \to \eta$ di $\mathcal{F}$ è cartesiana *se in ogni diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd}
\nu \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& \xi \arrow[r] \arrow[dd, mapsto] & \eta \arrow[dd, mapsto] \\
p(\nu) \arrow[dr] & & \\
& p(\xi) \arrow[r] & p(\eta)
\end{tikzcd}$$

esiste un'unica freccia tratteggiata.

In tal caso si dice che ξ è un pullback di η lungo l'omomorfismo $p(\eta) \to p(\xi)$.

Preso $A \in (\mathrm{Art}\,/k)$, si definisce una categoria "fibra" $\mathcal{F}(A)$ che ha come oggetti gli ξ tali che $p(\xi) = A$, e come frecce quelle che vanno su id_A.

Definizione

$\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ è una categoria fibrata in gruppoidi se ogni oggetto ha un pullback lungo ogni omomorfismo, e tutte le categorie fibra sono gruppoidi (cioè ogni freccia è un isomorfismo).

Esempio

$\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ definita in questo modo:

- oggetti: deformazioni di X_0 su $\mathrm{Spec}(A)$
- frecce: da $X \to \mathrm{Spec}(A)$ a $Y \to \mathrm{Spec}(B)$ sono coppie (φ, f) con $\varphi : B \to A$ e $f : X \cong Y \times_B A$ che induce l'identità sulle fibre isomorfe a X_0.

La categoria fibra $\mathcal{D}ef_{X_0}(A)$ è quella definita in precedenza.

Preso $A \in (\mathrm{Art}\,/k)$, si definisce una categoria “fibra” $\mathcal{F}(A)$ che ha come oggetti gli ξ tali che $p(\xi) = A$, e come frecce quelle che vanno su id_A.

Definizione

$\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ è una categoria fibrata in gruppoidi se ogni oggetto ha un pullback lungo ogni omomorfismo, e tutte le categorie fibra sono gruppoidi (cioè ogni freccia è un isomorfismo).

Esempio

$\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ definita in questo modo:

- oggetti: deformazioni di X_0 su $\mathrm{Spec}(A)$
- frecce: da $X \to \mathrm{Spec}(A)$ a $Y \to \mathrm{Spec}(B)$ sono coppie (φ, f) con $\varphi : B \to A$ e $f : X \cong Y \times_B A$ che induce l'identità sulle fibre isomorfe a X_0.

La categoria fibra $\mathcal{D}ef_{X_0}(A)$ è quella definita in precedenza.

Preso $A \in (\mathrm{Art}\,/k)$, si definisce una categoria "fibra" $\mathcal{F}(A)$ che ha come oggetti gli ξ tali che $p(\xi) = A$, e come frecce quelle che vanno su id_A.

Definizione

$\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ *è una categoria fibrata in gruppoidi se ogni oggetto ha un pullback lungo ogni omomorfismo, e tutte le categorie fibra sono gruppoidi (cioè ogni freccia è un isomorfismo).*

Esempio

$\mathcal{D}ef_{X_0} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ definita in questo modo:

- oggetti: deformazioni di X_0 su $\mathrm{Spec}(A)$
- frecce: da $X \to \mathrm{Spec}(A)$ a $Y \to \mathrm{Spec}(B)$ sono coppie (φ, f) con $\varphi : B \to A$ e $f : X \cong Y \times_B A$ che induce l'identità sulle fibre isomorfe a X_0.

La categoria fibra $\mathcal{D}ef_{X_0}(A)$ è quella definita in precedenza.

Condizione di Rim-Schlessinger

Le categorie che vengono da problemi "geometrici" hanno un'ulteriore proprietà.

Consideriamo una categoria fibrata in gruppoidi $\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$, tre oggetti A, A', A'' di $(\mathrm{Art}\,/k)$ e due omomorfismi $\pi' : A' \to A$ e $\pi'' : A'' \to A$, con π'' suriettivo. C'è un funtore naturale

$$\Phi : \mathcal{F}(A' \times_A A'') \to \mathcal{F}(A') \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(A'').$$

Definizione

$\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ soddisfa la condizione di Rim-Schlessinger [RS] se Φ è un'equivalenza per ogni scelta di A, A', A'', π', π'' come sopra.

Condizione di Rim-Schlessinger

Le categorie che vengono da problemi “geometrici” hanno un’ulteriore proprietà.

Consideriamo una categoria fibrata in gruppoidi $\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}/k)^{op}$, tre oggetti A, A', A'' di (Art/k) e due omomorfismi $\pi' : A' \to A$ e $\pi'' : A'' \to A$, con π'' suriettivo. C’è un funtore naturale

$$\Phi : \mathcal{F}(A' \times_A A'') \to \mathcal{F}(A') \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(A'').$$

Definizione

$\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}/k)^{op}$ soddisfa la condizione di Rim-Schlessinger [RS] se Φ è un’equivalenza per ogni scelta di A, A', A'', π', π'' come sopra.

Condizione di Rim-Schlessinger

Le categorie che vengono da problemi “geometrici” hanno un’ulteriore proprietà.

Consideriamo una categoria fibrata in gruppoidi $\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$, tre oggetti A, A', A'' di $(\mathrm{Art}\,/k)$ e due omomorfismi $\pi' : A' \to A$ e $\pi'' : A'' \to A$, con π'' suriettivo. C’è un funtore naturale

$$\Phi : \mathcal{F}(A' \times_A A'') \to \mathcal{F}(A') \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(A'').$$

Definizione

$\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ soddisfa la condizione di Rim-Schlessinger [RS] se Φ è un’equivalenza per ogni scelta di A, A', A'', π', π'' come sopra.

Riformulazione nel linguaggio delle categorie fibrate (usato per la prima volta da Rim) delle condizioni di Schlessinger. Chiamiamo categoria di deformazione una categoria fibrata in gruppoidi $\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}/k)^{op}$ che soddisfi [RS].

Fissato $\xi_0 \in \mathcal{F}(k)$, il punto di vista classico viene recuperato considerando il funtore $F : (\mathrm{Art}/k) \to (\mathrm{Set})$ dato da

$$F(A) = \left\{ \begin{array}{c} \text{classi di isomorfismo di oggetti in } \mathcal{F}(A) \\ \text{che si restringono a } \xi_0 \text{ su } k \end{array} \right\}.$$

Riformulazione nel linguaggio delle categorie fibrate (usato per la prima volta da Rim) delle condizioni di Schlessinger. Chiamiamo categoria di deformazione una categoria fibrata in gruppoidi $\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}/k)^{op}$ che soddisfi [RS].

Fissato $\xi_0 \in \mathcal{F}(k)$, il punto di vista classico viene recuperato considerando il funtore $F : (\mathrm{Art}/k) \to (\mathrm{Set})$ dato da

$$F(A) = \left\{ \begin{array}{c} \text{classi di isomorfismo di oggetti in } \mathcal{F}(A) \\ \text{che si restringono a } \xi_0 \text{ su } k \end{array} \right\}.$$

Spazio tangente

$\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}\,/k)^{op}$ categoria di deformazione.

Definizione

Lo spazio tangente a $\mathcal{F}$ in $\xi_0 \in \mathcal{F}(k)$ è

$$T_{\xi_0}\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{classi di isomorfismo di oggetti in } \mathcal{F}(k[\varepsilon]) \\ \textit{che si restringono a } \xi_0 \textit{ su } k \end{array} \right\}$$

Parametrizza (a meno di isomorfismo) le deformazioni al prim'ordine, e grazie a [RS] ha una struttura canonica di k-spazio vettoriale.
Generalizza il concetto analogo per schemi e funtori di deformazione.

Spazio tangente

$\mathcal{F} \to (\mathrm{Art}/k)^{op}$ categoria di deformazione.

Definizione

Lo spazio tangente a $\mathcal{F}$ in $\xi_0 \in \mathcal{F}(k)$ è

$$T_{\xi_0}\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{classi di isomorfismo di oggetti in } \mathcal{F}(k[\varepsilon]) \\ \textit{che si restringono a } \xi_0 \textit{ su } k \end{array} \right\}$$

Parametrizza (a meno di isomorfismo) le deformazioni al prim'ordine, e grazie a [RS] ha una struttura canonica di k-spazio vettoriale.
Generalizza il concetto analogo per schemi e funtori di deformazione.

Problema dei sollevamenti

Problema: data una suriezione $A' \to A$ in (Art/k), e una deformazione $\xi \in \mathcal{F}(A)$, esiste $\xi' \in \mathcal{F}(A')$ che si restringa a ξ su A? (un sollevamento di ξ)
Se sì, che relazione c'è tra due sollevamenti diversi?

Definizione

Una suriezione $\varphi : A' \to A$ in (Art/k) è un'estensione piccola se $\ker(\varphi)$ è annullato da $\mathfrak{m}_{A'}$.

Ogni suriezione in (Art/k) è composizione di estensioni piccole, quindi in molti casi ci si può ridurre allo studio di queste.

Problema dei sollevamenti

Problema: data una suriezione $A' \to A$ in $(\mathrm{Art}\,/k)$, e una deformazione $\xi \in \mathcal{F}(A)$, esiste $\xi' \in \mathcal{F}(A')$ che si restringa a ξ su A? (un sollevamento di ξ)
Se sì, che relazione c'è tra due sollevamenti diversi?

Definizione

Una suriezione $\varphi : A' \to A$ in $(\mathrm{Art}\,/k)$ è un'estensione piccola se $\ker(\varphi)$ è annullato da $\mathfrak{m}_{A'}$.

Ogni suriezione in $(\mathrm{Art}\,/k)$ è composizione di estensioni piccole, quindi in molti casi ci si può ridurre allo studio di queste.

Teorema

Se $A' \to A$ è un'estensione piccola con nucleo I e $\xi \in \mathcal{F}(A)$, se $\mathrm{Lif}(\xi, A')$ è non vuoto c'è un'azione liberamente transitiva di $I \otimes_k T_{\xi_0}\mathcal{F}$ su di esso.

Ad esempio se $T_{\xi_0}\mathcal{F} = 0$ tutti le deformazioni di ξ_0 su di una stessa $A \in (\mathrm{Art}/k)$ (oggetti di $\mathcal{F}(A)$ che si restringono a ξ_0 su k) sono isomorfe.

Teorema

Se X_0 è una varietà liscia su k, allora

$$T_{X_0}\mathcal{D}ef \cong H^1(X_0, T_{X_0})$$

dove T_{X_0} è il fascio tangente di X_0 (duale di $\Omega_{X_0/k}$).

Teorema

Se $A' \to A$ è un'estensione piccola con nucleo I e $\xi \in \mathcal{F}(A)$, se $\mathrm{Lif}(\xi, A')$ è non vuoto c'è un'azione liberamente transitiva di $I \otimes_k T_{\xi_0}\mathcal{F}$ su di esso.

Ad esempio se $T_{\xi_0}\mathcal{F} = 0$ tutti le deformazioni di ξ_0 su di una stessa $A \in (\mathrm{Art}/k)$ (oggetti di $\mathcal{F}(A)$ che si restringono a ξ_0 su k) sono isomorfe.

Teorema

Se X_0 è una varietà liscia su k, allora

$$T_{X_0}\mathcal{D}ef \cong H^1(X_0, T_{X_0})$$

dove T_{X_0} è il fascio tangente di X_0 (duale di $\Omega_{X_0/k}$).

Ostruzioni

Data un'estensione piccola $A' \to A$ e $\xi \in \mathcal{F}(A)$, esiste un sollevamento ad A'?

In molti casi, fissato $\xi_0 \in \mathcal{F}(k)$, c'è uno spazio vettoriale V_ω e un'associazione ω che per ogni estensione piccola $A' \to A$ con nucleo I e $\xi \in \mathcal{F}(A)$ che si restringe a ξ_0 su k dà un elemento

$$\omega(\xi, A') \in I \otimes_k V_\omega$$

che è zero se e solo se esiste un sollevamento.
La coppia (V_ω, ω) è una teoria dell'ostruzione per ξ_0.

Ostruzioni

Data un'estensione piccola $A' \to A$ e $\xi \in \mathcal{F}(A)$, esiste un sollevamento ad A'?

In molti casi, fissato $\xi_0 \in \mathcal{F}(k)$, c'è uno spazio vettoriale V_ω e un'associazione ω che per ogni estensione piccola $A' \to A$ con nucleo I e $\xi \in \mathcal{F}(A)$ che si restringe a ξ_0 su k dà un elemento

$$\omega(\xi, A') \in I \otimes_k V_\omega$$

che è zero se e solo se esiste un sollevamento.
La coppia (V_ω, ω) è una teoria dell'ostruzione per ξ_0.

Teorema

Se X_0 è una varietà liscia su k, allora esiste una teoria dell'ostruzione per X_0, con spazio vettoriale

$$V_\omega = H^2(X_0, T_{X_0}).$$

Se in particolare X_0 è affine, o è una curva, allora è non ostruito.

Osservazione

Può capitare che $H^2(X_0, T_{X_0}) \neq 0$ ma X_0 è non ostruito! Ad esempio X_0=superficie liscia in $\mathbb{P}^3_k$ di grado almeno 6.

Per questo a volte è utile considerare teorie dell'ostruzione minimali, in cui tutti gli elementi di V_ω sono ostruzioni di qualcosa.

Teorema

Se X_0 è una varietà liscia su k, allora esiste una teoria dell'ostruzione per X_0, con spazio vettoriale

$$V_\omega = H^2(X_0, T_{X_0}).$$

Se in particolare X_0 è affine, o è una curva, allora è non ostruito.

Osservazione

Può capitare che $H^2(X_0, T_{X_0}) \neq 0$ ma X_0 è non ostruito! Ad esempio X_0=superficie liscia in $\mathbb{P}^3_k$ di grado almeno 6.

Per questo a volte è utile considerare teorie dell'ostruzione minimali, in cui tutti gli elementi di V_ω sono ostruzioni di qualcosa.

Deformazioni formali

R una k-algebra noetheriana locale completa con campo residuo k; indichiamo con R_n il quoziente $R/\mathfrak{m}_R^{n+1}$.
($\sim$ limiti proiettivi di oggetti in (Art/k))

Definizione

Un oggetto (o deformazione) formale di $\mathcal{F}$ su R è una collezione $\{\xi_n, f_n\}$ dove $\xi_n \in \mathcal{F}(R_n)$, e $f_n : \xi_n \to \xi_{n+1}$ è una freccia di $\mathcal{F}$ compatibile con la proiezione $R_{n+1} \to R_n$.

Le frecce f_n danno un'identificazione canonica di ξ_n come pullback di ξ_{n+1}.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \xi_n \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & \xi_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R_n) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R_{n+1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Deformazioni formali

R una k-algebra noetheriana locale completa con campo residuo k; indichiamo con R_n il quoziente $R/\mathfrak{m}_R^{n+1}$.
($\sim$ limiti proiettivi di oggetti in $(\mathrm{Art}\,/k)$)

Definizione

Un oggetto (o deformazione) formale di $\mathcal{F}$ su R è una collezione $\{\xi_n, f_n\}$ dove $\xi_n \in \mathcal{F}(R_n)$, e $f_n : \xi_n \longrightarrow \xi_{n+1}$ è una freccia di $\mathcal{F}$ compatibile con la proiezione $R_{n+1} \longrightarrow R_n$.

Le frecce f_n danno un'identificazione canonica di ξ_n come pullback di ξ_{n+1}.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \xi_n \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & \xi_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R_n) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R_{n+1}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Si definiscono oggetti formali universali (e versali), che sono legati al concetto di prorappresentabilità di una categoria di deformazione ($\sim$ Lemma di Yoneda).

In questo contesto si dimostra per le categorie di deformazione un risultato analogo al Teorema di Schlessinger per i funtori di deformazione, che dà condizioni necessarie e sufficienti per la prorappresentabilità.

Si definiscono oggetti formali universali (e versali), che sono legati al concetto di prorappresentabilità di una categoria di deformazione ($\sim$ Lemma di Yoneda).

In questo contesto si dimostra per le categorie di deformazione un risultato analogo al Teorema di Schlessinger per i funtori di deformazione, che dà condizioni necessarie e sufficienti per la prorappresentabilità.

Algebrizzazione

X_0 schema proprio su k, supponiamo $\{X_n, f_n\}$ sia una deformazione formale di X_0 su R.

Esiste una deformazione "vera" di X_0 su R, cioè $f : X \to \mathrm{Spec}(R)$ proprio e piatto con fibra su $\mathfrak{m}_R$ isomorfa a X_0, che induca X_n per pullback su R_n?
(problema dell'algebrizzazione)

Teorema

Supponiamo X_0 proiettivo su k e tale che $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$. Allora ogni deformazione formale di X_0 è algebrizzabile.

Ad esempio, deformazioni formali di curve sono sempre algebrizzabili.

Algebrizzazione

X_0 schema proprio su k, supponiamo $\{X_n, f_n\}$ sia una deformazione formale di X_0 su R.

Esiste una deformazione "vera" di X_0 su R, cioè $f : X \to \mathrm{Spec}(R)$ proprio e piatto con fibra su $\mathfrak{m}_R$ isomorfa a X_0, che induca X_n per pullback su R_n?
(problema dell'algebrizzazione)

Teorema

Supponiamo X_0 proiettivo su k e tale che $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$. Allora ogni deformazione formale di X_0 è algebrizzabile.

Ad esempio, deformazioni formali di curve sono sempre algebrizzabili.

Grazie per l'attenzione