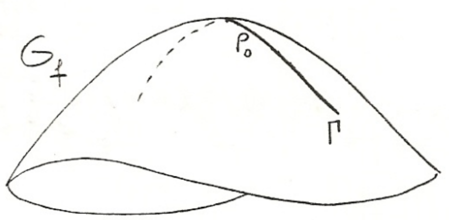
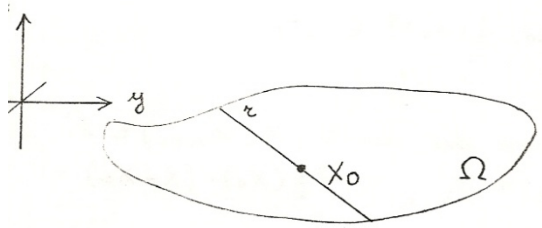
4. Piano tangente al grafico di una funzione

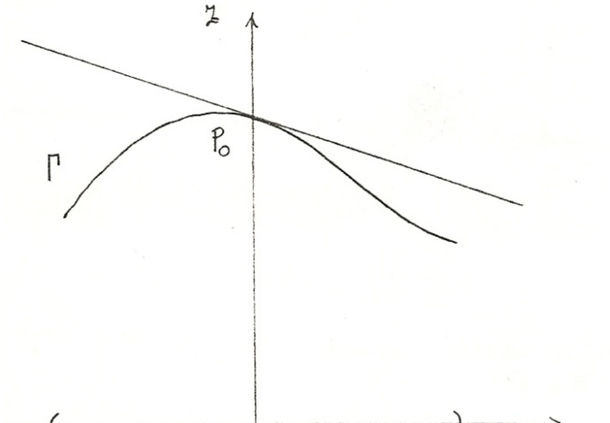
Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una fz. differenziabile in $X_0 \in \Omega$.
Il suo grafico G_f è una superficie in $\mathbb{R}^3$ descritta dall'eq. $z = f(X)$.
Sia $P_0 = (X_0, f(X_0)) = (X_0, z_0)$.
Definiamo piano tg. a G_f in P_0 il piano di equazione

$$z = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) = f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0)$$

caratterizzato dall'essere il piano passante per P_0 che dà la migliore approssimazione (lineare) locale di G_f
Questo piano ha un'interessante proprietà geometrica.







Fissiamo nel piano xy una direzione V e consideriamo la retta $X = X_0 + tV$ che per le t in un intorno di $t = 0$ (diciamo $t \in (-\delta, \delta)$) interseca Ω.
Se restringiamo la fz. a questo segmento e ne consideriamo il grafico, cioè se consideriamo i punti

$$\begin{cases} X = X_0 + tV \\ z = f(X_0 + tV) \end{cases}$$

otteniamo una curva Γ contenuta in G_f e passante per P_0, ottenuta sezionando G_f con il piano passante per la retta r e parallelo all'asse z.
In questo piano, Γ è grafico di

$$g(t) = f(X_0 + tV)$$

e dunque la retta tg. in P_0 ha equazione

$$z = g(0) + t\,g'(0)$$

cioè

$$z = f(X_0) + t\,\frac{\partial f(X_0)}{\partial V},$$

Nello spazio questa retta ha eq.

$$\begin{cases} X = X_0 + tV \\ z = f(X_0) + t\,\dfrac{\partial f}{\partial V}(X_0) \end{cases}$$

Al variare di V, troviamo un insieme di rette contenute nel piano tg., come si deduce eliminando il parametro t dalle eq.
Dunque il piano tg. contiene le rette tg. in P_0 alle curve ottenute sezionando il grafico della fz. nel modo descritto.

Il piano parallelo al piano tg. e passante per O ha equazione

$$z = \nabla f(X_0) \cdot X \qquad \text{ovvero} \qquad (\nabla f(X_0), -1) \cdot (X, z) = 0 .$$

Questo è l'insieme dei punti (X, z) ortogonali a $(\nabla f(X_0), -1)$, che dà dunque la direzione normale al grafico di f.
La retta normale a G_f in P_0 è dunque di eq.

$$\begin{cases} X = X_0 + t\,\nabla f(X_0) \\ z = f(X_0) - t \end{cases}$$

Es. $f(x,y) = xy^2$
$X_0 = (2,1)$

(PT) $z = 2 + (x-2) + 4(y-1)$
$x + 4y - z = 4$

(RN) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$