Successioni di funzioni

Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni

1. $f_n(x) = x^{-n}$ (per $x > 0$)
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2 x^2}$
3. $f_n(x) = \dfrac{n x}{1+n^2 x^2}$
4. $f_n(x) = \dfrac{n^2}{1+n^2 x^2}$
5. $f_n(x) = \dfrac{n^2 x^2}{1+n^2 x^2}$
6. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n x}{n}$
7. $f_n(x) = \left(x^2 - x^n \right)$
8. $f_n(x) = \begin{cases} a n^2 x & 0 \le x < 1/n \\ \dfrac{a}{1-b} n^2 x + \dfrac{a b}{b-1} n & 1/n \le x < b/n \\ 0 & b/n \le x \le b \end{cases}$ (con $a > 0$ $b > 1$)
9. $f_n(x) = (x-1)\, x^{-n}$ (per $x \geq 1$)
10. $f_n(x) = e^{-1/(x^2+n)}$
11. $f_n(x) = \dfrac{\cos x}{n} - \cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$
12. $f_n(x) = n x\, e^{-n^2 x^2}$

    Per quest'ultima successione in particolare far vedere che converge a 0, non uniformemente in [0,1] ma l'integrale in questo intervallo converge a 0.

Serie di funzioni

Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti serie di funzioni

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n x^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 x^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-n x}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n x}}{n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+n\,x\right)}{n^3\,x+n^2}$

6. Utilizzando il teorema di derivazione per serie, calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$ nell'intervallo [-a,a], con 0 < a < 1

Serie di potenze

Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti serie di potenze

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\,x^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(3+1/n\right)^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\,x^n$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,x^n}{\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\left(n+1\right)2^n}$
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots\left(\alpha-\left(n-1\right)\right)}{n!}\,x^n$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(x+3\right)^n}{2^n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x+1\right)^n}{2^n\,n^3}$

Serie di Taylor

1. Scrivere i primi quattro termini (non nulli) della serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f\left(x\right)=1/\left(1+x^2\right)$, deducendoli da una serie di Taylor nota
2. Come sopra per la funzione $f\left(x\right)=\text{arcsen}\,x$

3. Scrivere la serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

4. Senza effettuare il calcolo delle derivate successive della funzione $f(x) = \log 1 + x$, verificare che $f^{(7)}(0) = 6!$

5. Scrivere la serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = e^{-x^2}$

6. Scrivere $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ come somma di una serie numerica

7. Approssimare $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ con un errore minore di 1%

8. Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, studiare la convergenza puntuale e uniforme.

   Indicata con $f(x)$ la sua somma, utilizzare il teorema di derivata sotto il segno di serie per dedurre lo sviluppo in serie di potenze della funzione $f'(x)$.

   Trovare la funzione $f'(x)$, utilizzando opportunamente uno sviluppo in serie di quelli noti.

   Integrando, dedurre la funzione $f(x)$.