Soluzioni A

1. Comportamento all'infinito

$\text{se } y=0,\ f(x,0) \sim x^2 \to +\infty$ la funzione non è limitata

$\text{se } x=0,\ f(0,y) \sim -y^2 \to -\infty$

Punti di non derivabilità:

$\nexists \dfrac{\partial f}{\partial x}$ nei punti $(1, y)$ (retta $x=1$)

Punti stazionari

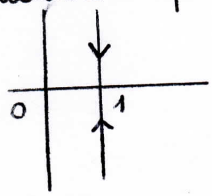
$(\pm 2, 0)$

Matrice hessiana nei punti stazionari

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to$ i punti sono di sella

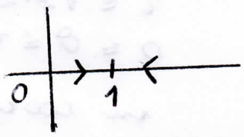
Rimangono da studiare i punti della retta $x=1$.

$f(1, y) = 1 - y^2$

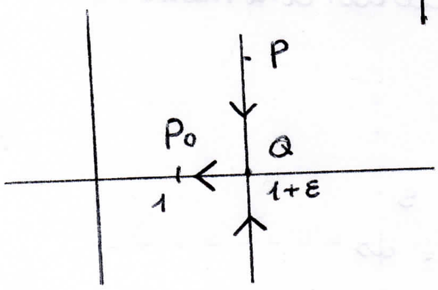


Dunque l'unico punto da considerare è $(1, 0)$ (che potrebbe essere di massimo); gli altri non sono né di minimo né di massimo.

$f(x, 0) = x^2 - 4|x-1|$



Il comportamento sull'asse x conferma la possibilità che $(1,0)$ sia di massimo.



Consideriamo il comportamento sulle rette $x = 1 \pm \varepsilon$.

$f(P) < f(Q) < f(P_0)$

Questo prova che P_0 è di massimo locale.

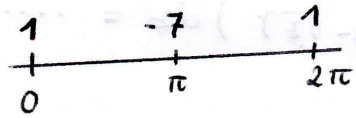
Studio nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

Nessun punto stazionario interno; $(1, 0)$ punto singolare sul bordo.

Posto $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ $(\theta \in [0, 2\pi])$, si ottiene la funzione

$F(\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - 4 + 4\cos\theta = 2\cos^2\theta + 4\cos\theta - 5.$

$F'(\theta) = -4 \operatorname{sen}\theta (\cos\theta + 1).$



$\max = 1$ in $(1, 0)$

$\min = -7$ in $(-1, 0)$

2. Equazione a variabili separate.

$A(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \geq 0$ $\quad B(y) = \dfrac{1-y^2}{y}$, $0 < y \leq 1$

$y = 1$ soluzione costante

$B'(y) = -1 - \dfrac{1}{y^2}$ si mantiene limitata nell'intorno di ogni punto nel dominio

Per il teorema di Cauchy, ammette una ed una sola soluzione nell'intorno di ogni punto nel dominio.

$$\int \frac{y}{1-y^2}\,dy = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \to -\frac{1}{2}\lg(1-y^2) = \frac{1}{2}\lg(1+x^2) - \frac{c}{2} \to$$

$$\lg(1-y^2) = c - \lg(1+x^2) \to 1-y^2 = \frac{K}{1+x^2} \quad (K>0) \to y^2 = 1 - \frac{K}{1+x^2}$$

$$y(x) = \sqrt{1-\frac{K}{1+x^2}}$$

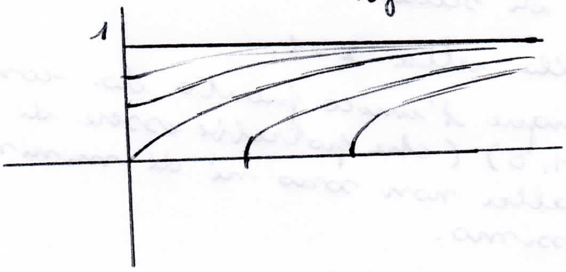
Deve essere $0 < 1-\frac{K}{1+x^2} < 1 \to 1+x^2 > K \to x^2 > K-1 \to \begin{cases} x > \sqrt{K-1} & \text{se } K \geq 1 \\ x > 0 & \text{se } 0<K<1 \end{cases}$

$\operatorname{sgn} y' > 0$

Se $K>1$: $\begin{array}{l} x \to \sqrt{K-1} \\ y \to 0 \end{array} \to y' \to +\infty$ punto a tg verticale

Se $K<1$: $\begin{array}{l} x \to 0 \\ y \to \sqrt{1-K} \end{array} \to y' \to 0$ punto a tg. orizz.

Se $K=1$: $\begin{array}{l} x \to 0 \\ y \to 0 \end{array}$ $y' \to 1$



3. $x^2+y^2 \leq z - z^2$, $0 \leq y \leq x/\sqrt{3}$

$0 \leq z \leq 1$, $x^2+y^2 \leq z-z^2$, $0 \leq y \leq x/\sqrt{3}$

$0 \leq z \leq 1$, $r \leq \sqrt{z-z^2}$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/6$ in coord. cilindriche

sezioni

$$\int_0^{\pi/6} d\vartheta \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z-z^2}} \frac{r}{1+\sqrt{r^2+z^2}}\,dr$$

$$\frac{\pi}{6}\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z-z^2}} \frac{r}{1+\sqrt{r^2+z^2}}\,dr$$

$\sqrt{r^2+z^2} = s$

$\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dr = ds$

$r\,dr = s\,ds$

$$\frac{\pi}{6}\int_0^1 dz \int_z^{\sqrt{z}} \frac{s}{1+s}\,ds$$

$$\frac{\pi}{6}\int_0^1 \left(\sqrt{z} - z + \lg(1-\sqrt{z})\right) dz = \ldots\ldots$$