Soluzioni

1. La funzione non è limitata. Per provarlo, si può – ad esempio – restringerla ai punti della forma $(0,1,z)$, con $z \in \mathbb{R}$ (retta parallela all'asse $z$, passante per $(0,1,0)$): la funzione $\varphi(z) = z$ così ottenuta non è limitata.

$\nabla f = (y+z,\ x+z,\ x+y)$

Unico punto stazionario è l'origine. La matrice hessiana $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è costante ed ha come autovalori $-1$ (doppio) e $2$. Dunque l'unico punto stazionario è di sella.

In alternativa, si può restringere la funzione – ad esempio – ai punti $(x,x,0)$ e $(x,-x,0)$: nel primo caso si ottiene la funzione $x^2$ che nell'origine ha un punto di minimo, nel secondo caso $-x^2$ che ha un punto di massimo.

Il cono può essere scritto nella forma $z = \sqrt{x^2+y^2}$, con $x^2+y^2 \le 1$.

Ci riconduciamo a studiare la funzione $\varphi(x,y) = xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}$ sul compatto $x^2+y^2 \le 1$.

La funzione non è differenziabile in $(0,0)$; in questo punto vale $0$.

I punti stazionari risolvono il sistema:

$$\begin{cases} y + \sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\[2mm] x + \sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro:

$$y - x + \frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x \quad \text{oppure} \quad \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1.$$

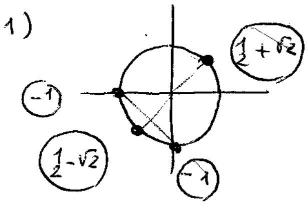
Nel primo caso si ottiene $x + \sqrt{2x^2} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2}} = 0$, cioè $\sqrt{2}\,x|x| + 4x^2 = 0$. L'unica soluzione $x=0$ (e dunque $y=0$) non interessa.

Nel secondo caso si ottiene $y + x + y + x = 0$ e dunque $x+y=0$, da scartare dato che deve essere $x+y/\sqrt{x^2+y^2} = 1$.

Sulla circonferenza $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ $(\theta \in [0,2\pi])$ la funzione diventa $\psi(\theta) = \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$.

$\psi'(\theta) = -\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta + 1)$

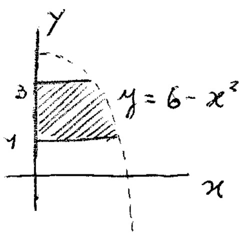
In conclusione:




$\max f = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$\min f = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$ in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

2.




$$y_G = \frac{\displaystyle\int_1^3 y\,dy \iint_{x^2+z^2 \le 6-y} dx\,dz}{\displaystyle\int_1^3 dy \iint_{x^2+z^2 \le 6-y} dx\,dz} = \frac{\displaystyle\int_1^3 \pi y(6-y)\,dy}{\displaystyle\int_1^3 \pi(6-y)\,dy} = \dots = \frac{23}{12}$$

3. La condizione perché il campo sia irrotazionale $\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\right)$ è $-4xy = -2axy$, verificata per $a=2$.

Sotto questa condizione il campo è conservativo nella regione semplicemente connessa $x^2+2y^2-9<0$. Per vedere se lo è anche in $x^2+2y^2-9>0$, calcoliamo il lavoro sulla curva $x^2+2y^2=16$ (ad esempio), parametrizzata nella forma $x = 4\cos\theta$, $y = \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta$ $(\theta \in [0,2\pi])$.

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{4\cos\theta}{7} - 4\cos\theta,\ \frac{8/\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta}{7} \right) \cdot \left( -4\operatorname{sen}\theta,\ 4/\sqrt{2}\,\cos\theta \right) d\theta = \dots$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{40}{7} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta = 0.$$

Calcolo del potenziale:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+2y^2-9} - x \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \lg|x^2+2y^2-9| - \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{2y}{x^2+2y^2-9} + \varphi'(y) = \frac{2y}{x^2+2y^2-9} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{costante}$$

$$U = \frac{1}{2} \lg|x^2+2y^2-9| - \frac{1}{2}x^2 + c.$$

4. $y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$

Sostituendo, si ottiene il problema $\begin{cases} xz' = z^2+1 \\ z(1) = 1 \end{cases}$.

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{arctg}\, z = \lg x + c \quad (x>0 \text{ per ipotesi})$$

La C.I. è verificata per $c = \pi/4$.

$$\text{arctg}\, z = \lg x + \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \text{tg}\left(\lg x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Deve essere

$$-\frac{\pi}{2} < \lg x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-3/4\pi} < x < e^{\pi/4}.$$

Ritornando alla y:

$$y = x\, \text{tg}\left(\lg x + \frac{\pi}{4}\right).$$