Soluzioni

1. C.E. $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{y}}$: la condizione del teorema di Cauchy non è verificata se $y_0 = 0$.

Risoluzione dell'eq. (a variabili separate)

$y = 0$ soluzione costante

Per trovare le altre soluzioni, procediamo come di consueto separando le variabili e integrando:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}\,(\sqrt{y}+1)} = \int dx$$

nel primo integrale si pone $\sqrt{y} = t \rightarrow y = t^2$, $dy = 2t\,dt$:

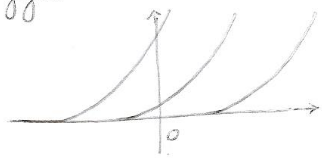
$$\int 2\,\frac{dt}{t+1} = \lg(t+1)^2 + c$$

Dunque:

$$\lg(\sqrt{y}+1)^2 = x - c \rightarrow (\sqrt{y}+1)^2 = h e^{x} \quad (h = e^{-c}) \rightarrow$$

$$\sqrt{y} + 1 = R e^{x/2} \quad (R = \sqrt{h}) \underset{(*)}{\rightarrow} y = (R e^{x/2} - 1)^2$$

Per la validità dell'ultimo passaggio deve essere $Re^{x/2} - 1 > 0$ cioè $x > -2 \lg R$.



Il problema con condizione iniziale:

- se $y_0 < 0$ nessuna soluzione
- se $y_0 > 0$ una sola soluzione con intervallo massimale $\mathbb{R}$ (la soluzione si prolunga a sinistra con la soluzione costante
- se $y_0 = 0$ infinite soluzioni (oltre a quella costante) con intervallo massimale $\mathbb{R}$.

2. L'insieme dato è limitato (è contenuto nella sfera unitaria) e chiuso (intersezione di chiusi); poiché la fz. è continua, vale il teorema di Weierstrass.

Per poter applicare il metodo dei moltiplicatori, occorre verificare che nell'insieme dato la matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2(y-\frac{1}{4}) & 0 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2. Poiché i minori di ordine 2 si annullano se $x = 0 \wedge xz = 0 \wedge (y - \frac{1}{4})z = 0$, non è difficile verificare che queste condizioni non sono compatibili con le equazioni che definiscono l'insieme.

$$\mathcal{L} = \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 + \lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right) + \mu\left(x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)$$

$$\begin{cases} 2\lambda x + 2\mu x = 0 \\ 2\left(y-\frac{1}{4}\right) + 2\lambda y + 2\mu\left(y-\frac{1}{4}\right) = 0 \\ 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

A.

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2\left(y-\frac{1}{4}\right)+2\lambda y+2\mu\left(y-\frac{1}{4}\right)=0 \\ \lambda z = 0 \\ y^2+z^2=1 \\ y^2-\frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{matrix} \longrightarrow$$

A1

$x = 0$
$y = 0$
$z = \pm 1$

In questi punti $f = \frac{1}{16}$

A2

$x = 0$
$y = 1/2$
$z = \pm\sqrt{3}/2$

$f = \frac{1}{16}$

B.

$$\begin{cases} \mu = -\lambda \\ 2y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\ \lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \end{cases} \longrightarrow$$

B1

$\lambda = \mu = 0$
$y = 1/4$
$x^2 = 1/16$
$z^2 = 7/8$

$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \pm\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$
$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \pm\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$

$f = 0$

B2

$z = 0$
$x^2+y^2 = 1$
$x^2+y^2-\frac{1}{2}y = 0$

nessuna sol.

MAX $= 1/16$ MIN $= 0$

3. $\left| x^3y/(x^2+y^2) \right| = \left| r^2\cos^3\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \right| \leq r^2 \to 0$

Si ottiene un prolungamento continuo ponendo $f(0,0)=0$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \to 0$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \to 0$ (passando a coord. polari)

Dunque f è di classe C^1 e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
I punti stazionari sono le soluzioni del sistema:

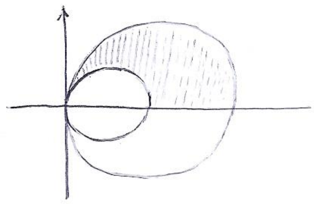
$$x^2y\left(x^2+3y^2\right) = 0, \quad x^3\left(x^2-y^2\right) = 0,$$

cioè i punti dell'asse y. Tenendo conto del segno della funzione (positiva nel I e III quadrante, negativa negli altri due), nessuno di questi punti è di massimo o minimo.

I punti di massimo o minimo nel cerchio devono dunque essere cercati sulla frontiera. Posto $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, ci riconduciamo a studiare la funzione $\varphi(\theta) = \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
Per questa si ha: $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$, $\varphi'(\theta) = \cos^2\theta(\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta) = 0$ per $\cos\theta = 0$ o per $\operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{3}/3$.
Si ottiene: $\max f = \frac{3}{16}\sqrt{3}$, $\min f = -\frac{3}{16}\sqrt{3}$; i punti di massimo sono $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quelli di minimo $\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4.

$$x^2 - x + y^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4}$$
$$x^2 - 2x + y^2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$



In coordinate polari:

$$r^2 - r\cos\theta \geq 0 \quad \rightarrow \quad r \geq \cos\theta$$
$$r^2 - 2r\cos\theta \leq 0 \quad \rightarrow \quad r \leq 2\cos\theta$$

Dunque:

$$\cos\theta \leq r \leq 2\cos\theta$$
$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$y = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \frac{2r}{r^2+1} \, dr = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \lg \frac{4\cos^2\theta + 1}{\cos^2\theta + 1} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \lg \frac{1+4t}{1+t} \, dt = \ldots$$

per parti