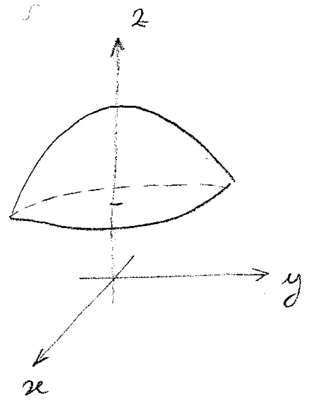
1.



$(a)_1$ Flusso uscente dalla superficie del paraboloide

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2 - u^2 - v^2 \end{cases} \quad \text{con } (u,v):\ u^2+v^2 \le 1$$

$\phi_u = (1,0,-2u)$, $\phi_v = (0,1,-2v)$ $\quad \phi_u \wedge \phi_v = (2u, 2v, 1)$

orientato verso l'interno

$$\iint_C \left(1, 1, \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \cdot (2u, 2v, 1)\, du\, dv =$$

$$= \iint_C \Big(\underbrace{2u + 2v}_{\text{non danno contributo}} + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \Big)\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr = 2\pi .$$

$(a)_2$ Flusso uscente dalla base

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} r \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix} \quad \begin{matrix} \phi_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \\ \phi_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) \end{matrix}$$

$\phi_u \wedge \phi_v = (0, 0, r)$

orientato verso l'interno

Dobbiamo cambiare segno

$$\iint_R \left(1, 1, \frac{1}{r}\right) \cdot (0, 0, r)\, dr\, d\theta = \iint_R dr\, d\theta = 2\pi$$

Il flusso uscente è dunque -2π.

$(a)_3$ Il flusso totale è dunque nullo.

Per il teorema di Gauss, il flusso è uguale all'integrale di $\operatorname{div} F$ nel volume. Poiché $\operatorname{div} F = 0$, ritroviamo il valore 0.

$(b)_1$ Circuitazione sul bordo orientato

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \\ z = 1 \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} (1,1,1) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta =$$

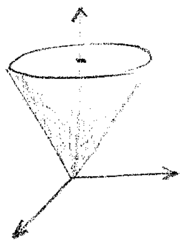
$$= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\, d\theta = 0 .$$

(b_2) Per il teorema di Stokes la circuitazione è il flusso di $\operatorname{rot} F$ uscente dalla superficie del paraboloide.

$$\operatorname{rot} F = \left(-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 0 \right)$$

$$\iint_C \left(-\frac{v}{(u^2+v^2)^{3/2}}, \frac{u}{(u^2+v^2)^{3/2}}, 0 \right) \cdot (2u, 2v, 1)\, du\, dv = 0 .$$

2.



- Punti stazionari interni

$\nabla f = (y, x, 2z)$ nullo nell'origine che non è interno

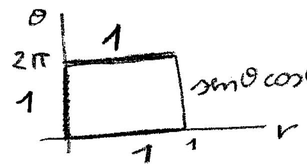
- Sulla base $x^2+y^2 \le 1,\ z=1 \to (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 1)$ $\quad r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$F(r,\theta) = r^2 \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta + 1$

$\nabla F = (2r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta,\ r^2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)) = (r\,\mathrm{sen}\,2\theta,\ r\cos 2\theta)$

Si annulla solo se $r=0$; quindi in nessun punto interno

Sul bordo del rettangolo



$\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 1 = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\theta$

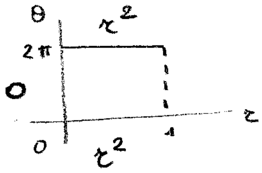
Sulla frontiera il valore massimo è $3/2$ (per $r=1$, $\theta = \pi/4$ o $5\pi/4$), il minimo $\frac{1}{2}$ ($r=1$, $\theta = 3\pi/4$ o $7\pi/4$).

- Sul cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 < 1$ (la circonferenza di base è già stata considerata).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r < 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

$F(r,\theta) = r^2(\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 1)$

$\nabla F = (r\,\mathrm{sen}\,2\theta,\ r^2\cos 2\theta)$ nessun punto stazionario interno.



Sulla frontiera il minimo è 0 (per $r=0$); il sup 1.

In conclusione

$M = \frac{3}{2}$ assunto in $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 1\right)$ e in $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 1\right)$.

$m = 0$ assunto in $(0,0,0)$.

3. Il campo è irrotazionale; ma – essendo definito in una regione che non è semplicemente connessa – questo non basta ad assicurare che è conservativo. Occorre (e basterà) calcolare il lavoro su una curva chiusa attorno all'origine (possiamo scegliere la circonferenza di centro l'origine e raggio 1) e controllare se è nullo.

$$L = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta,\ 1 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot(-\mathrm{sen}\,\theta,\ \cos\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = 0.$$

Dunque il campo è conservativo.

Per calcolare il potenziale, si procede come di consueto:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 - \frac{2x}{x^2+y^2} \to U = x - \lg(x^2+y^2) + c(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2+y^2} + c'(y) = 1 - \frac{2y}{x^2+y^2} \to c'(y) = 1 \to c(y) = y + K$$

$$U = x + y - \lg(x^2+y^2) + K.$$

4.

Dalla prima eq.: $v = \frac{u'' - 3u}{4}$, da cui $v'' = \frac{u^{IV} - 3u''}{4}$.
Sostituendo nella seconda: $u^{IV} - 2u'' + u = 4 \operatorname{sen} x$.
Il polinomio caratteristico $k^4 - 2k^2 + 1 = (k^2 - 1)$ ha come radici ± 1 con molteplicità 2.
Una base dello spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea associata è:

$$e^x, \; e^{-x}, \; x e^x, \; x e^{-x}.$$

Scritta l'eq. in forma complessa $z^{IV} - 2z'' + z = 4 e^{ix}$, cerchiamo una soluzione nella forma $A e^{ix}$. Sostituendo, si trova che deve essere $A = 1/4$.
Della sol. $\bar{z} = \frac{1}{4} e^{ix} = \frac{1}{4} (\cos x + i \operatorname{sen} x)$ prendiamo la parte imm.:
$\bar{y} = \frac{1}{4} \operatorname{sen} x$.
In conclusione:

$$y = e^x (c_1 + c_2 x) + e^{-x} (c_3 + c_4 x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen} x.$$