$y' = x y^2$

$A(x) = x \in C^0(\mathbb{R})$
$B(y) = y^2 \in C^0(\mathbb{R})$

Per il teorema di Peano l'eq. ammette soluzione locale qualunque sia la C.I. scelta

$y = 0$ soluzione costante

$B'(y) = 2y \in C^0(\mathbb{R})$

Per il teor. di Cauchy, il problema con C.I. ha una sola soluzione. Quindi i grafici delle soluzioni non si intersecano tra di loro né con la soluzione costante.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - \frac{c}{2} \quad (*)$$

(la costante arbitraria è stata chiamata $-c/2$)

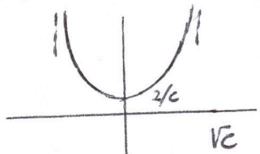
$$y = \frac{2}{c - x^2}$$

Le soluzioni positive sono definite per $c - x^2 > 0$, cioè $x^2 < c$. Perché questo abbia senso, deve essere $c \geq 0$; le soluzioni sono dunque definite per $x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$.

Le soluzioni negative sono definite per $x^2 > c$, cioè per $x < -\sqrt{c}$ o $x > \sqrt{c}$ se $c \geq 0$, per $x \in \mathbb{R}$ se $c < 0$.

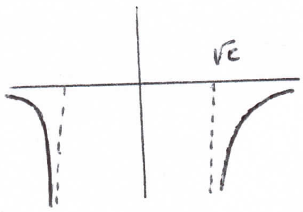
Le fz. sono pari e quindi possiamo limitarci a studiarle per $x \geq 0$.
Poiché $y' = xy^2$, il segno della derivata è quello di x.
Per tracciare i grafici, basta trovare il limite agli estremi dell'intervallo o degli intervalli in cui le soluzioni sono definite e poi tener conto del segno della derivata per stabilire crescenza o decrescenza.

Soluzioni positive: per $x \to \sqrt{c}^-$ $\quad y(x) \to +\infty$
per $x = 0$ $\quad y(0) = \frac{2}{c} > 0$

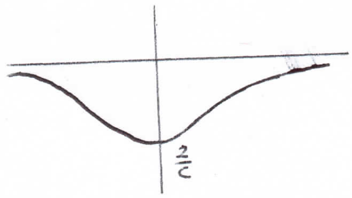


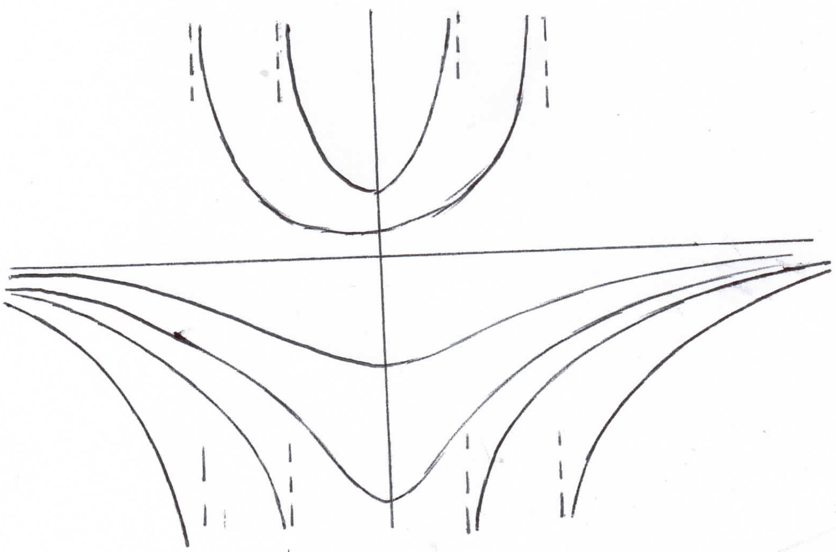
Soluzioni negative:

se $c \geq 0$ $\quad$ per $x \to \sqrt{c}^+$ $\quad y(x) \to -\infty$
per $x \to +\infty$ $\quad y(x) \to 0$



se $c < 0$ $\quad$ per $x = 0$ $\quad y(x) = \frac{2}{c} < 0$
per $x \to +\infty$ $\quad y(x) \to 0$





C.I. $y(0) = 1$

Ponendo in $(*)$ $y = 1$, $x = 0$ si ottiene $c = 2$.
$y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$, $\quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

C.I. $y(1) = -1$

Ponendo in $(*)$ $y = -1$, $x = 1$ si ottiene $c = -1$.
$y(x) = -\frac{2}{1 + x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

C.I. $y(1) = -4$

Per $c = 1/2$.
$y(x) = \frac{4}{1 - 2x^2}$, $\quad x > 1/\sqrt{2}$

C.I. $y(-1) = 0$

$y = 0$ costante

$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$

$A(x) = 2x \in C^0(\mathbb{R})$

$B(y) = \sqrt{1-y^2} \in C^0([-1,1])$

$B'(y) = -y/\sqrt{1-y^2}$ non esiste per $y = \pm 1$ che sono le soluzioni costanti.

Non vale il teorema di Cauchy: ci aspettiamo che le soluzioni (esistono per il teorema di Peano) si intersechino con le soluzioni costanti (ma non tra di loro) in modo da far mancare l'unicità quando la C.I. è assegnata con $y_0 = \pm 1$.

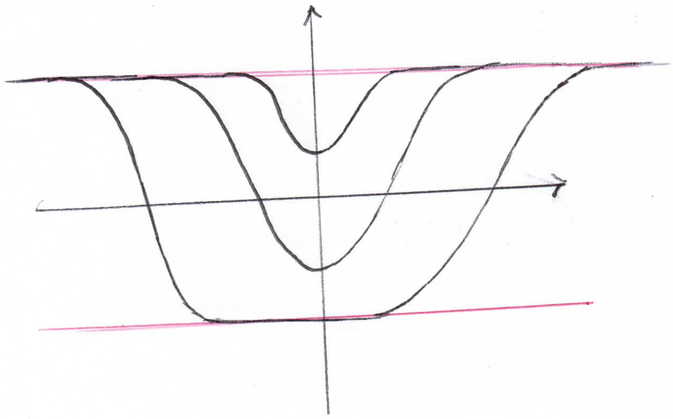
$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 2x\,dx$$

$\arcsin y = x^2 - c$ (la costante arbitraria è stata chiamata $-c$)

$y = \operatorname{sen}(x^2 - c)$

Deve essere $-\frac{\pi}{2} < x^2 - c < \frac{\pi}{2}$, cioè $c - \frac{\pi}{2} < x^2 < c + \frac{\pi}{2}$.
Perché questo abbia senso, deve essere $c \geq -\frac{\pi}{2}$.
Se $c \geq \pi/2$ deve essere $\sqrt{c - \frac{\pi}{2}} < |x| < \sqrt{c + \frac{\pi}{2}}$.
Se $-\frac{\pi}{2} \leq c < \frac{\pi}{2}$ deve essere $|x| < \sqrt{c + \frac{\pi}{2}}$

Per tracciare i grafici, osservare che $\operatorname{sgn} y' = \operatorname{sgn} x$.



Le soluzioni si raccordano con le costanti ± 1 in un caso, con la sola costante 1 nell'altro. Poiché nei punti di raccordo è $y' = 0$ (perché $y = \pm 1$), le soluzioni si prolungano su tutto $\mathbb{R}$ usando le costanti.