– Teorema di Cauchy (esistenza e unicità locale)

Sia $f(t,u)$ continua e localmente lipschitziana in u uniformemente rispetto a t in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$.
Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

con $(t_0, u_0) \in \Omega$ ha una e una sola soluzione $u(t)$ definita e di classe C^1 in un intorno di t_0.

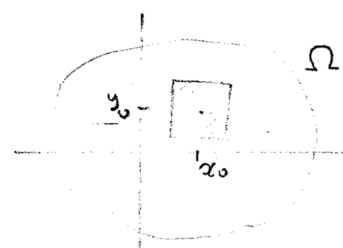
dim.

Basterà provare che $\exists_1\, u(t) \in C^0(I(t_0)) : u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds$.
Per fare questo ricorriamo al teorema delle contrazioni, vedendo la soluzione cercata come punto fisso dell'applicazione

$$u(t) \xrightarrow{\quad F \quad} u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds \qquad (*)$$

Siano $r_1, r_2 > 0$ tali che, posto

$$I_1 = I(t_0, r_1), \qquad I_2 = I(u_0, r_2)$$



risulti

$$\bar{I}_1 \times \bar{I}_2 \subset \Omega$$

e che la funzione f sia lipschitziana rispetto ad u in tale rettangolo.
Poniamo

$$X = \{ u \in C^0(\bar{I}_1) : \| u - u_0 \|_\infty \le r_2 \}.$$

Poichè X è chiuso in $C^0(\bar{I}_1)$ completo rispetto alla norma $\| \ \|_\infty$, anche X è completo. (+)

Consideriamo adesso l'applicazione definita su X da $(*)$.

(+)
Sia f_n una successione di Cauchy in X. Per la completezza di $C^0(\bar{I}_1)$, $\exists f \in C^0(\bar{I}_1)$: $f_n \to f$ uniformemente (cioè in norma).
Inoltre, per ipotesi è $u_0 - r_2 \le f_n(x) \le u_0 + r_2 \quad \forall x \in \bar{I}_1$. Passando al limite, è anche $u_0 - r_2 \le f(x) \le u_0 + r_2$, $\forall x \in \bar{I}_1$; cioè $\| f - u_0 \|_\infty \le r_2$.
Dunque, X è completo.

Perchè F mandi $\mathcal{X}$ in sè, deve risultare

$$\| F(u) - u_0 \|_\infty \leq r_2 .$$

Ma

$$| F(u)(t) - u_0 | = | \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds | \leq M r_1$$

se

$$M = \max |f| \quad \text{in } \bar{I}_1 \times \bar{I}_2 .$$

Dunque occorre che sia

$$r_1 \leq \frac{r_2}{M} .$$

Rimane da imporre che F risulti una contrazione.
Se $u, v \in \mathcal{X}$,

$$| F(u)(t) - F(v)(t) | = | \int_{t_0}^{t} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\, ds | \leq$$

$$\leq L r_1 \| u - v \|_\infty .$$

Dunque deve essere

$$r_1 < \frac{1}{L}$$

In definitiva, se r_0 è un numero reale t.c.

$$0 < r_0 < \min \left\{ r_1, \frac{r_2}{M}, \frac{1}{L} \right\}$$

il teorema delle contrazioni permette di dedurre in $\bar{I}(t_0, r_0)$ l'esistenza e l'unicità di una soluzione continua dell'equazione integrale e, dunque, di una soluzione di classe C^1 del problema di Cauchy.

NB: $\frac{1}{L}$ è un dato del problema (dipende da f ed A)
r_1, r_2, M dipendono dal rettangolo

Ipotesi sotto le quali vale il teorema

caso lineare
$f(x, y) = -a(x)y + f(x)$ — a, f continue in $I(x_0)$

$f(x, y) = A(x) B(y)$ — A continua in $I(x_0)$, B derivabile in $I(y_0)$ con derivata limitata. (in particolare B di classe C^1).
caso variabili separate

Esistenza in grande (+ unicità)

$f(x,y)$ continua in $[a,b] \times \mathbb{R}$
lipschitz. in y unif. rispetto a x (globalmente)
(oppure: $\frac{\partial f}{\partial y}$ esiste ed è limitata nella striscia)

$(x_0, y_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}$

La sol. (unica) esiste in tutto $[a,b]$.

Riprendiamo la dimostrazione.

$E = C^0[x_0, x_0+\tau]$

$T(y): \quad T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$

L'ipotesi che T mandi E in E è verificata senza ulteriori condizioni.
Dobbiamo imporre che sia una contrazione: $\tau < \frac{1}{L}$.
Si trova la soluzione in $[x_0, x_0+\frac{1}{L}]$. Se $x_0 + \frac{1}{L} \geq b$, il procedimento termina. Altrimenti si riparte da - ad es. - $x_0 + \frac{1}{L}$:
Dopo un numero finito di passi si arriva a b.
Analogamente, verso sinistra.

Es. $\begin{cases} y' = 1+y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad y = \operatorname{tg} x$
la sol. non è definita in tutto $\mathbb{R}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ non è limitata (globalm.)

$\begin{cases} y' = \frac{1+x^2}{1+y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\quad y = x$
la sol. è definita $\forall x \in \mathbb{R}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{1+y^2}(1+x^2)$
Se x varia in un intervallo limitato $[a,b]$
e y in $\mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ è limitata.