Teoremi sui campi conservativi

Def.: Un campo vettoriale $F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice conservativo se esiste un campo scalare $U: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $F = \operatorname{grad} U$.

T1 : Sia F un campo vettoriale continuo su un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^n$.
F è conservativo $\Longleftrightarrow$ il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dagli estremi.

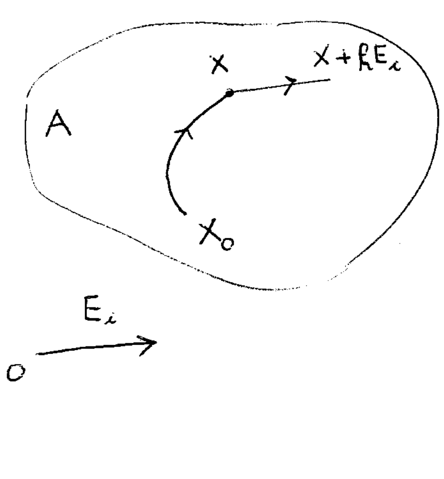
$\Rightarrow$

Sia $F = \operatorname{grad} U$
Siano $X, Y \in A$ e $\varphi: [a,b] \to A$ la parametrizzazione di classe C^1 di una curva che unisce X ad Y ($\varphi(a) = X$, $\varphi(b) = Y$).
Vogliamo provare che $\int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = U(Y) - U(X)$, cioè che il lavoro è uguale alla differenza di potenziale agli estremi della traiettoria.

$$\int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{grad} U(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b U(\varphi(t))'\,dt =$$
$$= U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)) =$$
$$= U(Y) - U(X).$$

$\Leftarrow$

Fissiamo $X_0 \in A$.
$\forall X \in A$, sia $\varphi: [a,b] \to A$ la parametrizzazione di classe C^1 di una curva contenuta in A che unisce X_0 ad X.
Poniamo $U(X) = \int_\varphi F \cdot d\varphi = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$.
Per ipotesi questo lavoro non dipende dalla curva, ma solo dagli estremi; dunque, solo da X, essendo X_0 fisso.
Vogliamo provare che $\dfrac{\partial U}{\partial x_i}(X) = F_i(X)$.



$U(X + hE_i) - U(X)$

è il lavoro per andare da X a $X + hE_i$; lo calcoliamo sulla curva in figura (per ipotesi il risultato non dipende da questa particolare scelta).

$$= \int_0^1 F(X + thE_i) \cdot hE_i\,dt$$

(il segmento è stato parametrizzato nella forma $\psi(t) = X + thE_i$ con $t \in [0,1]$). Poniamo $th = s$, $h\,dt = ds$

$$= \int_0^h F_i(X + sE_i)\,ds$$

$$\frac{U(X+hE_i)-U(X)}{h} = \frac{\int_0^h F_i(X+sE_i)\,ds}{h} =$$

$$= F_i(X+\bar{s}E_i) \quad \text{con } \bar{s}\in[0,h]$$

teor. media integrale

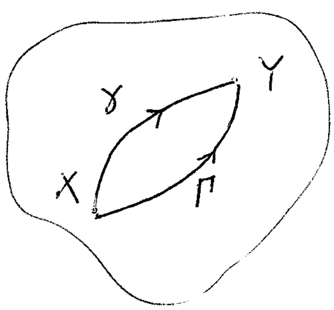
Per $h\to 0$, $F_i(X+\bar{s}E_i)\to F_i(X)$.

✓

T2. : Sia F un c. vettoriale continuo su un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$
F conservativo <=> il lavoro su ogni linea chiusa è nullo.

$\Rightarrow$ Se il campo è conservativo, il lavoro dipende solo dagli estremi della traiettoria ed è la differenza di potenziale in tali punti.
In una linea chiusa gli estremi coincidono e dunque tale differenza è nulla.

$\Leftarrow$



Dato il teorema precedente, proviamo che il lavoro per andare da un punto X ad un punto Y non dipende dalla traiettoria seguita. Siano γ e Γ due di queste traiettorie, parametrizzate rispettivamente con $\varphi(t)$ e $\psi(t)$.
Dobbiamo provare che:

$$\int_\varphi F\cdot d\varphi = \int_\psi F\cdot d\psi$$

cioè

$$\int_\varphi F\cdot d\varphi - \int_\psi F\cdot d\psi = 0$$

ovvero

$$\int_\varphi F\cdot d\varphi + \int_{-\psi} F\cdot d\psi = 0$$

avendo indicato con $-\psi$ la curva Γ orientata nel verso opposto a quello stabilito. Quest'ultima somma è il lavoro su una linea chiusa e dunque è nullo per ipotesi.

✓