Un problema di massimo e minimo con hessiano nullo

$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$

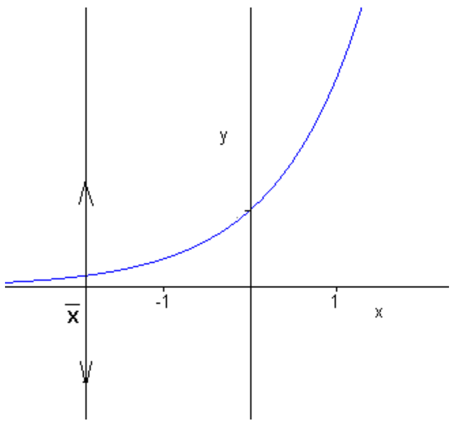
La funzione ha tre punti stazionari : $(1, e)$, $(0, 0)$, $(-1, e^{-1})$, che si trovano sulla curva $y = e^x$.

In questi punti la matrice hessiana ha determinante nullo, quindi non possiamo usare i metodi al secondo ordine per studiare il comportamento della funzione.

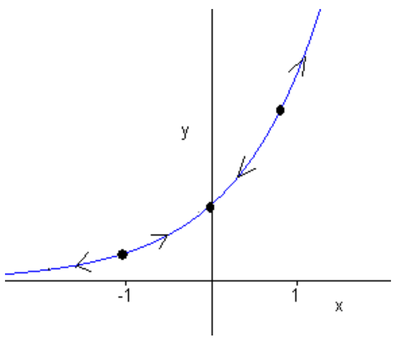
Ricorriamo al metodo delle restrizioni.

La restrizione ad una qualunque retta verticale $f(\bar{x}, y) = \bar{x}^4 - 2\bar{x}^2 + (e^{\bar{x}} - y)^4$ ha minimo nel punto in cui la retta interseca la curva $y = e^x$.

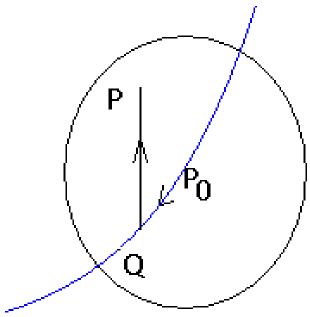
Nella figura sotto le frecce indicano il verso di crescita.



Sulla curva $y = e^x$ la funzione diventa $f(x, e^x) = x^4 - 2x^2$; studiando il segno della derivata, si ottiene il comportamento illustrato dalla figura successiva.



Questo prova che (0 , 1) è un punto di sella (di minima per una restrizione, di massimo per l'altra); gli altri due punti invece sono di minimo in entrambi i casi, ma questo non basta a dedurre che lo sono globalmente. Per provarlo, indichiamo con P_0 uno o l'altro di questi due punti (il ragionamento è identico in entrambi i casi). Prendiamo un intorno di P_0 che non contenga il punto (0, 1); sia $P \neq P_0$ un punto di questo intorno e sia Q il punto in cui la retta verticale per P interseca la curva $y = e^x$. Dalla discussione precedente si ottiene che è $f(P) > f(Q) > f(P_0)$ e questo prova che P_0 è di minimo locale.



In realtà i due punti sono di minimo assoluto, perché $f(x, y) \to +\infty$ all'infinito .