Esercizio 4 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{1+k^2x}\right),$$

sull'intervallo $(0,+\infty)$ e su $(1,+\infty)$.

Per ogni fissato $x > 0$ abbiamo che $f_k(x) := \log\left(1 + \frac{1}{1+k^2x}\right) \sim \frac{1}{xk^2}$ per $k \to +\infty$, pertanto la serie converge puntualmente per il criterio del confronto asintotico. Tuttavia su $(0,+\infty)$ la convergenza non può essere uniforme, in quanto

$$\sup_{x>0} f_k(x) = +\infty.$$

Il discorso cambia se prendiamo in considerazione l'intervallo $(1,+\infty)$: dato che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione f_k è decrescente, abbiamo che

$$\sup_{x>1} f_k(x) = f_k(1) = \log(1 + \frac{1}{k^2}) \sim \frac{1}{k^2} \qquad \text{per } k \to +\infty.$$

Da questo possiamo immediatamente dedurre che la serie è totalmente convergente (e, di conseguenza, anche uniformemente convergente) sull'intervallo $(1,+\infty)$.

Esercizio 4 Una ditta che produce componenti elettroniche stima che la probabilità che un singolo pezzo sia difettoso sia $p = 1/10$. Dato $n \in \mathbb{N}$, indichiamo con S_n la variabile aleatoria che descrive il numero di componenti difettosi in una partita di n pezzi.

(i) Calcolare $E[S_n]$ e $Var(S_n)$.

(ii) Scrivere la formula per calcolare $P(S_{10} \leq 2)$.

(iii) Nel caso in cui $n = 64$, usare il teorema del limite centrale per stimare $P(S_{64} \leq 5)$.

È naturale modellizzare la distribuzione di S_n mediante una legge binomiale $B(n,p)$ con $p = 1/10$, pertanto $E[S_n] = np = \frac{n}{10}$, e $Var(S_n) = np(1-p) = n\frac{9}{100}$. Inoltre, dato che $P(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ si avrà che

$$\begin{aligned} P(S_10 \leq 2) &= P(S_{10} = 0) + P(S_{10} = 1) + P(S_{10} = 2) \\ &= \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + 10\left(\frac{9}{10}\right)^9 \frac{1}{10} + 45\left(\frac{9}{10}\right)^8\left(\frac{1}{10}\right)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Per $n = 64$ possiamo invece fare appello al teorema del limite centrale ed assumere che S_{64} sia distribuita secondo una legge normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = \frac{64}{10}$ e $\sigma^2 = 64\frac{9}{100}$ (e quindi $\sigma = \frac{24}{10}$; dato però che S_n è pur sempre una variabile aleatoria discreta adotteremo la correzione di continuità usuale. Pertanto scriviamo:

$$P(S_{64} \leq 5) = P(\mu + \sigma Z \leq 5.5) = P(Z \leq -\frac{3}{8}) = 1 - P(Z < \frac{3}{8}),$$

dove la prima è un'uguaglianza approssimata (che tiene conto della correzione di continuità), Z è una variabile aleatoria standardizzata, e l'ultima uguaglianza è conseguenza delle proprietà di simmetria della legge normale standard. Alla fine, facendo semplici calcoli ed usando le tavole, otteniamo che $P(S_{64} \leq 5) = 0.35$.