Analisi Matematica II - Prova scritta #5 del 13.1.2010

1.

Sia V il dominio definito da $\{ (x, y, z) : z \geq 0 , x^2 + y^2 + z^2 \leq 8 , z^2 \geq x^2 + y^2 \}$. Calcolare:

- il volume di V
- l'area della superficie che delimita V
- il flusso del campo vettoriale $F = (3x^2 - 3y^2 , 2z - 6xy , z)$ uscente da V, usando il teorema della divergenza

2.

Data la funzione $f(x, y) = (x^2 - y^2 + x + y)\, e^{x+y}$, calcolare:

- estremo superiore ed inferiore
- i punti stazionari, precisandone la natura
- il massimo e minimo sull'insieme definito da $0 \leq x \leq 1$, $y^2 \leq x^2$.

Provare che in un intorno del punto $P = (1, 1)$ la linea di livello $f(x, y) = 2e^2$ è grafico di una funzione $\varphi(x)$ di classe C^1.

Scrivere l'equazione della retta tangente alla linea di livello nel punto P.

3

Studiare la convergenza della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+k^2x^2}$.

In particolare, determinare l'insieme di convergenza puntuale e dire se in tale insieme la convergenza é anche uniforme. (Sugg.: si usi il criterio della convergenza totale).

4.

Una compagnia aerea modellizza il peso del bagaglio a mano di ciascun passeggero con una variabile aleatoria continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{per } 0 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove A è un'opportuna costante di normalizzazione.

(i) Calcolare il valore atteso e la varianza di tale variabile aleatoria.

(ii) Sapendo che l'aereo ha 128 posti, calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria S che modellizza il peso complessivo dei bagagli a mano nel caso in cui l'aereo sia pieno (sotto l'ipotesi che il peso dei bagagli dei viaggiatori siano variabili indipendenti).

(iii) Stimare $P(S > 800)$.