Esercizio 4 Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1+k^2x^2}.$$

In particolare si determini l'insieme di convergenza puntuale e si dica se su tale insieme la convergenza è anche uniforme (Sugg: si usi il criterio della convergenza totale).

Per quanto riguarda la convergenza puntuale, si verifica immediatamente che per $|x| > 1$ si ha $\lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^k}{1+k^2x^2} = +\infty$, e quindi la serie non converge. Se $|x| = 1$ la serie converge assolutamente, e lo stesso vale anche per $|x| < 1$ per il criterio del confronto, in quanto $\frac{|x|^k}{1+k^2x^2} \leq |x|^k$. In definitiva si ha convergenza puntuale sull'intervallo $[-1, 1]$.

Posto $u_k(x) := \frac{x^k}{1+k^2x^2}$ osserviamo che $u_k'(x) = \frac{kx^{k-1}}{(1+k^2x^2)^2}[1 + (k^2 - 2k)x^2]$, di conseguenza per $k \geq 2$ si ha $u'(x) > 0$ per $x > 0$, e quindi $\sup_{0\leq x\leq 1} u(x) = u(1) = \frac{1}{1+k^2}$ per ogni $k \geq 2$. Dato che, per simmetria, $\sup_{-1\leq x\leq 1} |u_k(x)| = \sup_{0\leq x\leq 1} u_k(x)$, possiamo concludere che $\sum_k u_k(x)$ è totalmente convergente sull'intervallo $[-1, 1]$, di conseguenza è anche uniformemente convergente..

Esercizio 4 Una compagnia aerea modellizza il peso del bagaglio a mano di ciascun passeggero con una variabile aleatoria continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{per } 0 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove A è una opportuna costante di normalizzazione.

(i) Calcolare il valore atteso e la varianza di tale variabile aleatoria.

(ii) Sapendo che l'aereo ha 128 posti, si calcoli il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria S che modellizza il peso complessivo dei bagagli a mano nel caso in cui l'aereo sia pieno (sotto l'ipotesi che il peso del bagagli dei viaggiatori siano variabili indipendenti).

(iii) Stimare $P(S > 800)$.

Affincé la funzione f sia una densità di probabilità serve che $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx =$

1, di conseguenza $A = 2/81$. Chiamata X la variabile aleatoria che rappresenta il peso di un singolo bagaglio si ha che

$$E[X] = \int_0^9 xf(x)dx = \frac{2}{81}\int_0^9 x^2 dx = 6$$

e

$$E[X^2] = \int_0^9 x^2 f(x)dx = \frac{2}{81}\int_0^9 x^3 dx = \frac{81}{2}, \quad Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{9}{2}.$$

Chiamata S la variabile aleatoria che descrive il peso complessivo dei bagagli sull'aereo a pieno carico avremo che $E[S] = 128 \times 6 = 768$; inoltre, visto che i pesi dei bagagli si assumono indipendenti, si ha anche $Var(S) = 128 \times \frac{9}{2} = 64 \times 9 = (24)^2$. Possiamo quindi applicare il teorema del limite centrale, deducendo che S approssimativamente segue una legge normale, quindi $S \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 768$ e $\sigma = 24$; di conseguenza

$$P(S > 800) = P(\sigma Z + \mu > 800) = P(Z > \frac{800 - \mu}{\sigma}) = P(Z > 4/3),$$

dove Z segue la legge normale standard. Dato che $4/9 = 1.3333...$, usando le tavole otteniamo che $P(S > 800) = 1 - 0.9082 = 0.0978$ (circa il 10%).