Esercizio 3 Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2^k + 3^k}}{k^2 + k^3} x^k.$$

In particolare determinare l'insieme di convergenza puntuale ed uniforme della serie. Detta $F(x)$ la somma della serie, dire se si tratta di una funzione derivabile all'interno dell'insieme di definizione, e dire se la derivata può essere estesa fino al bordo dell'insieme di definizione.

Notiamo che $\sqrt{2^k + 3^k} \sim \sqrt{3}^k(1 + o(1))$ per $k \to +\infty$, di conseguenza è immediato verificare che la serie converge per $|x| < \sqrt{1/3}$ ma non converge per $|x| > \sqrt{1/3}$; pertanto il raggio di convergenza è $R = \sqrt{3}$. In effetti si ha anche che, se $|x| \leq \sqrt{1/3}$

$$|\frac{\sqrt{2^k + 3^k}}{k^2 + k^3} x^k| \leq \frac{2}{k^2 + k^3}$$

pertanto la serie converge totalmente sull'intervallo chiuso $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, quindi converge anche uniformemente su tale intervallo.

La serie derivata è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2^k + 3^k}}{k + k^2} x^{k-1};$$

argomenti analoghi a quelli visti sopra mostrano che anche questa serie converge totalmente (e quindi uniformemente) sull'intervallo chiuso $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, quindi per il teorema di derivazione per serie la funzione definita dalla serie è derivabile, e la sua derivata si estende fino al bordo.

Esercizio 3 La lunghezza delle viti prodotte da un macchinario è modellizzata da una variabile aleatoria che segue la legge normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La macchina viene tarata per produrre viti lunghe $\mu = 45mm$, e la deviazione standard che si registra è di $\sigma = 0.5mm$. Sapendo che il controllo qualità scarta i pezzi che si discostano da μ per più di $1mm$, determinare la il valore atteso della percentuale di viti che vengono scartate.
Una seconda macchina produce in ogni unità oraria il doppio dei pezzi, è tarata come la prima, ma con una deviazione standard di $\sigma = 0.8mm$.
Qual è la probabilità che prendendo a caso un pezzo che ha superato il controllo qualità, questo risulti prodotto dalla prima delle due macchine?

Detta X la variabile aleatoria che rappresenta la lunghezza in mm di una vite prodotta dalla macchina abbiamo che $X = \sigma Z + \mu$ con $\sigma = 0.5$ e $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Quindi

$$P(\mu - 1 \leq X \leq \mu + 1) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2(1 - \Phi(2)).$$

Dalle tavole della funzione di ripartizione della legge normale standard sappiamo che $\Phi(2) = 0.97725$ per cui in definitiva $P(\mu - 1 \leq X \leq \mu + 1) = 0.0455$. Pertanto il valore atteso della percentuale di viti scartate è del 4.55%.

Detta Y la variabile aleatoria che rappresenta la lunghezza in mm di una vite prodotta dalla seconda macchina abbiamo che $Y = \sigma Z + \mu$ con $\sigma = 0.8$ e $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Quindi

$$P(\mu - 1 \leq Y \leq \mu + 1) = P(-1.25 \leq Z \leq 1.25) = 2(1 - \Phi(1.25)).$$

Dalle tavole della funzione di ripartizione della legge normale standard sappiamo che $\Phi(1.25) = 0.89435$ per cui in definitiva $P(\mu - 1 \leq Y \leq \mu + 1) = 0.2113$. Pertanto per la seconda macchina il valore atteso della percentuale di viti scartate è del 21.13%.

Se S denota l'evento "il pezzo scelto ha passato il controllo qualità" ed A l'evento "il pezzo scelto 'è stato prodotto dalla prima macchina", utilizzando la formula di Bayes otteniamo

$$P(A|S) = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S|A)P(A) + P(S|A^c)P(A^c)} = \frac{0.9545 \cdot (1/3)}{0.9545 \cdot (1/3) + 0.7887 \cdot (2/3)} = 0.377$$