Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
29 giugno 2019

Esame di analisi II; quesiti 3 e 4.

Esercizio 3 Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-k\sqrt{1+x^2}}}{k}.$$

In particolare mostrare che la serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$ e dire se tale convergenza è uniforme. Detta $F(x)$ la somma della serie, dire se si tratta di una funzione derivabile. Facoltativo: calcolare esplicitamente F.

Dato che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{e^{-k\sqrt{1+x^2}}}{k}| = \frac{e^{-k}}{k}$$

e $\sum \frac{e^{-k}}{k}$ è convergente deduciamo che la serie di partenza è totalmente convergente. Di conseguenza la serie è anche uniformemente e puntiualmente convergente su $\mathbb{R}$.

La serie derivata è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-k\sqrt{1+x^2}}.$$

Dato che $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-k\sqrt{1+x^2}}| \le e^{-k}$, anche la serie derivata risulta totalmente convergente, pertanto il teorema di convergenza per serie assicura che F è derivabile.

Posto $y := e^{-\sqrt{1+x^2}}$, notiamo che la serie si scrive come una serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y^k}{k}$$

la cui serie derivata è $\sum_{k=1}^{+\infty} y^{k-1} = \frac{1}{1-y}$. Pertanto da ciò deduciamo che

$$F(x) = -\log(1 - e^{-\sqrt{1+x^2}}).$$

Esercizio 4 Il tempo medio necessario per sottoporre a test un'unità di prodotto su una linea di produzione è uguale a $\mu = 160$". Dire quale valore bisogna assegnare al parametro $\lambda > 0$ al fine di modellizzare il tempo necessario per un test con una variabile aleatoria continua X con legge esponenziale di densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (per $x \geq 0$). Usare questo modello per calcolare $Var(X)$ e $P(X \geq \mu)$. Stimare la probabilità che 5 ore di lavoro ininterrotto siano sufficienti per eseguire 100 test (assumendo che i tempi necessari per eseguire i test siano variabili aleatorie indipendenti di legge esponenziale).

Sappiamo che se X segue una legge esponenziale allora $E[X] = 1/\lambda$ e $Var(X) = 1/\lambda^2$; pertanto $\lambda = 1/160$. Inoltre si ha che

$$P(X \geq \mu) = \int_{\mu}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{1}^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-1}.$$

Nel penultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\mu = 1/\lambda$ e il cambio di variabile $y = \lambda x$.

Chiamate $X_1, ..., X_{100}$ le variabili aleatorie che modellizzano il tempo necessario per ciascuno dei 100 test, il tempo complessivo necessario per eseguire 100 test è modellizzato dalla variabile aleatoria $S = X_1 + ... + X_{100}$ e si ha che

$$E[S] = 16000, \qquad Var(S) = 100 \cdot (160)^2.$$

D'altro canto 5 ore corrispondono a 18000 secondi.

Per il teorema del limite centrale S segue approssimativamente la legge $\mathcal{N}(E[S], Var(S))$, ovvero $S \approx 16000 + 1600Z$ con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ pertanto

$$P(S \leq 18000) \approx P(16000 + 1600Z \leq 18000) = P(Z \leq 5/4) = 0.8944.$$