Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile

7 giugno 2019

Esame di analisi II; quesiti 3 e 4.

Esercizio 3 Sia $f_n(x) := \frac{n}{\log(1+e^{nx^2})}$. Determinare l'insieme su cui vi è convergenza puntuale. Dire se la convergenza è anche uniforme. Dire se f_n converge uniformemente sull'insieme $\{|x| > 1/4\}$.

Osserviamo che $f_n(0) = \frac{n}{\log 2}$, e quindi la successione non converge per $x = 0$. Inoltre se $x \neq 0$ si ha che

$$\log(1 + e^{nx^2}) = \log(e^{nx^2}) + \log(e^{-nx^2} + 1) = nx^2 + o(1) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Di conseguenza per $x \neq 0$ otteniamo

$$f_n(x) = \frac{n}{nx^2 + o(1)} = \frac{1}{x^2 + o(1/n)} \to \frac{1}{x^2} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Ovviamente la convergenza non può essere uniforme su $\mathbb{R} \setminus (0)$ in quanto $\sup_{x\neq 0} |f_n(x) - \frac{1}{x^2}| = +\infty$ tuttavia è uniforme per $|x| \geq 1/4$:

$$|\frac{1}{x^2} - f_n(x)| = |\frac{1}{x^2} - \frac{n}{nx^2 + \log(e^{-nx^2} + 1)}| = |\frac{\log(e^{-nx^2} + 1)}{x^2(nx^2 + \log(e^{-nx^2} + 1)}| \leq 32\frac{\log 2}{n} \to 0.$$

Esercizio 4 Un aereo di linea può trasportare un massimo di 193 passeggeri. Tuttavia, dato che statisticamente molti viaggiatori rinunciano a partire, la compagnia aerea che gestisce il volo ha venduto 225 biglietti. Assumiamo inoltre che

- ciascun passeggero rinuncia al viaggio con una probabilità del 20
- la decisione di ogni passeggero è indipendente da quella di tutti gli altri.

Stimare la probabilità che il numero di passeggeri che si presentano al gate ecceda i posti disponibili; effettuare il calcolo nei modi seguenti:

i. utilizzando una opportuna distribuzione binomiale (basta la formula)

ii. sfruttando il teorema del limite centrale (e la correzione di continuità) per approssimare la suddetta legge binomiale con una legge normale (in modo da poter utilizzare le tavole della legge normale standard per effettuare il calcolo numerico).

Sia $n := 225$ e per $1 \leq j \leq n$ sia X_j la variabile aleatoria che vale 1 se il j-esimo biglietto venduto viene utilizzato e vale 0 altrimenti; dal testo deduciamo che $p := P(X_j = 1) = 0.8$ e $1 - p = P(X_j = 0) = 0.2$. La somma $S_n = X_1 + ... + X_n$ è quindi la variabile aleatoria che rappresenta il numero di passeggeri che effettivamente si presentano al gate per partire e segue la legge binomiale $B(n, p)$ con $n = 225$ e $p = 0.8$. La probabilità che i 193 posti disponibili siano insufficienti per imbarcare tutti i passeggeri che si presentano al gate si calcola con la formula

$$\sum_{k=194}^{225} \binom{225}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Si ha che $E[S_n] = np = 180$; dall'ipotesi di indipendenza delle X_j sappiamo anche che $Var(S_n) = Var(X_1) + ... + Var(X_n) = np(1-p) = 36$. Utilizzando la legge dei grandi numeri ci garantisce che S_n è approssimativamente distribuita secondo la legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 180$ e $\sigma^2 = 36$; di conseguenza (ricordando di fare la correzione di continuità) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P(S_n > 193) = P(S_n > 193.5) &= P(\frac{S_n - \mu}{\sigma} > \frac{193.5 - \mu}{\sigma}) \\ &= P(Z > 2.25) = 1 - P(Z \leq 2.25) = 0.012. \end{aligned}$$