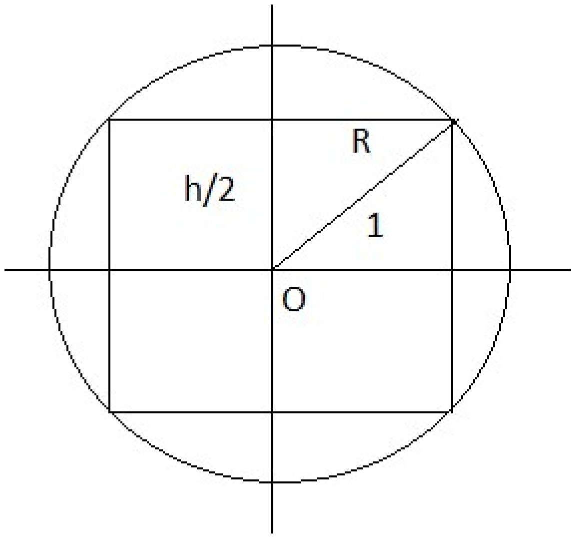
Soluzioni [A]

1.



$0 \le R \le 1$

$0 \le h \le 2$

Dobbiamo rendere massima la funzione $f(R, h) = \pi R^2 h$ sotto il vincolo che risulti $R^2 + h^2/4 = 1$.

La funzione lagrangiana associata è $L = \pi R^2 h + \lambda (R^2 + h^2/4 - 1)$.

La ricerca dei punti stazionari di L porta al sistema :

$R h + \lambda R = 0$, $R^2 + \lambda h / 2 = 0$, $R^2 + h^2/4 = 1$.

La prima equazione fornisce $R = 0$, da scartare perché porta ad un volume nullo; oppure $\lambda = - h$.

Sostituendo nella seconda equazione, si ottiene $R^2 = h^2 / 2$.

Sostituendo infine nella terza equazione, si trova $h^2 = 4/3$ e dunque $h = 2\sqrt{3} / 3$, R = , valori che rendono massimo il volume del cilindro.

2.

Posto $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 - 7z^3 + 3y + 1$, $P = (1, 1, 1)$, si ha :

$\mathrm{grad} f = (3x^2, 4y + 3, -21z^2)$, $\mathrm{grad} f(P) = (3, 7, -21)$

L'equazione del piano tangente T è data da $(3, 7, -21) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$, cioè $3x + 7y - 21z + 11 = 0$.

Il volume della parte di cilindro compresa tra il piano T e il piano xy è data da:

$$\iint_D dx\,dy \int_0^{(3x+7y+11)/21} dz$$ con D = $\{(x,y) : (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1\}$.

Dopo una prima integrazione si trova : $\frac{1}{21}\iint_{(x-1)^2+(y-1)^2\le 1} (3x+7y+11)\,dx\,dy$.

Si osservi che nel dominio D la funzione integranda è positiva, perché x ≥ 0 e y ≥ -1.

Passando a coordinate polari centrate in (1 , 1) : x = 1 + r cosϑ , y = 1 + r senϑ, si ottiene :

$$\frac{1}{21}\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\,(3+3r\cos\vartheta+7+7\,\mathrm{sen}\,\vartheta+11)\,d\vartheta =$$

$$\frac{1}{21}\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\,(21+3r\cos\vartheta+7r\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$2\pi\int_0^1 r\,dr = \pi.$$

3.

Ricaviamo z dalla seconda equazione : z = -x e sostituiamo nella prima : $x^2 + y^2 = 2$.

La curva può essere rappresentata in forma parametrica da :

$x=\sqrt{2}\cos\vartheta$, $y=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, $z=-\sqrt{2}\cos\vartheta$ con $0 \le \vartheta \le 2\pi$

(che ha l'orientamento richiesto). La circuitazione è data da :

$$\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta-2\sqrt{2}\cos\vartheta,\sqrt{2}\cos\vartheta,\sqrt{2}\cos\vartheta+2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\cdot(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\sqrt{2}\cos\vartheta,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,d\vartheta$$

ovvero

$$\int_0^{2\pi}(2+6\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta)\,d\vartheta = 4\pi\,.$$

Ritroviamo il risultato calcolando il flusso del rotore uscente dalla superficie definita da $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 \le 10$, x + z = 0 ovvero $x^2 + y^2 \le 2$, z = -x; questa può essere parametrizzata nella forma x = r cosϑ , y = r senϑ , z = - r cosϑ (con $0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$). Poiché rot F = (1 , 1 , 1) , $\Phi_r \times \Phi_\vartheta = (r , 0 , r)$,

il flusso è dato da :

$$\int_0^{\sqrt{2}} 2\, r\, dr \int_0^{2\pi} d\vartheta = 4\pi .$$

4.

Se x ≠ 0 , per n → +∞ $f_n (x) \approx \dfrac{2^n\, x}{2^n\, n\, x^2} = \dfrac{1}{n\, x} \to 0$

Se x = 0, f_n (0) = 0 → 0.

Dunque la successione tende puntualmente a 0.

Fissato n, studiamo la funzione f_n (x) .

f_n (0) = 0 ; per x →+∞ f_n (x) ≈ 1 / (n x) → 0

f_n' (x) = $2^n \dfrac{1 - n\, 2^n\, x^2}{(1 + 2^n\, n\, x^2)^2}$ ≥ 0 per x ≤ $1 / \sqrt{n\, 2^n}$.

Dunque $\| f_n \| = f (1 / \sqrt{n\, 2^n}) = \dfrac{2^{n/2}}{2\sqrt{n}} \to +\infty .$

Questo prova che la convergenza non è uniforme.

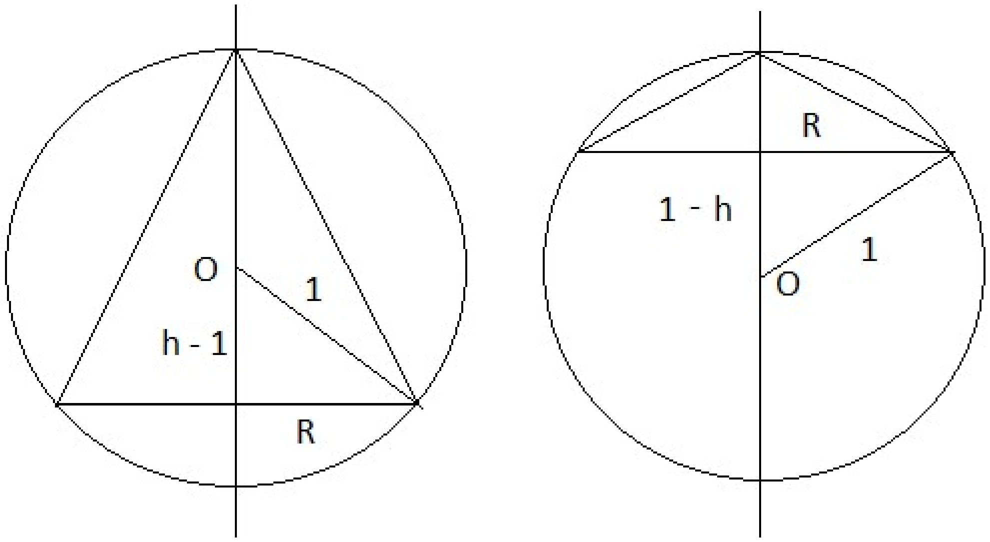
Restringiamo il dominio ad una semiretta [a , +∞). Poiché definitivamente il punto di massimo trovato diventa minore di a, si ottiene :

$$\| f_n \|_{[a, +\infty)} = f_n (a) = \frac{2^n\, a}{1 + n\, 2^n\, a^2} \approx \frac{1}{n\, a} \to 0$$

che fornisce la convergenza uniforme in ogni semiretta [a , +∞) con a > 0.

Soluzioni [B]

1.



Nella figura a sinistra il cono ha altezza maggiore del raggio della sfera , nell'altra ha altezza minore.

$f(R, h) = \pi R^2 h / 3$ sotto il vincolo che risulti $R^2 + (h - 1)^2 = 1$.

Possiamo trascurare la costante $\pi / 3$: il punto di massimo non cambia.

La ricerca dei punti stazionari di L porta al sistema :

$2R h + 2 \lambda R = 0$, $R^2 + 2 \lambda (h - 1) = 0$, $R^2 + (h - 1)^2 = 1$.

La prima equazione fornisce $R = 0$, da scartare perché porta ad un volume nullo; oppure $\lambda = - h$.

Sostituendo nella seconda equazione, si ottiene $R^2 = 2 h (h - 1)$, e questo implica che deve essere $h > 1$.

Sostituendo infine nella terza equazione, si trova $(h - 1)^2 + 2 h (h - 1) = 1$ ovvero $3 h^2 - 4 h = 0$; scartato il valore $h = 0$, si trova $h = 4 / 3$, $R = 2 \sqrt{2} / 3$, valori che rendono massimo il volume del cilindro.

2.

Posto $f(x, y, z) = 2 x^2 + y^3 - 7 z^3 + 3 x + 1$, $P = (1, 1, 1)$, si ha :

$\text{grad} f = (4 x + 3, 3 y^2, - 21 z^2)$, $\text{grad} f(P) = (7, 3, -21)$

L'equazione del piano tangente T è data da (7 , 3, -21) · (x – 1 , y – 1 , z – 1) = 0 , cioè 7 x + 3 y – 21 z + 11 = 0.

Il volume della parte di cilindro compresa tra il piano T e il piano xy è data da:

$\iint_D dx\,dy \int_0^{(7x+3y+11)/21} dz$ con D = $\{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

Dopo una prima integrazione si trova : $\frac{1}{21} \iint_{(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1} (7x + 3y + 11)\, dx\,dy$.

Si osservi che nel dominio D la funzione integranda è positiva, perché x ≥ 0 e y ≥ -1.

Passando a coordinate polari centrate in (1 , 1) : x = 1 + r cosϑ , y = 1 + r senϑ, si ottiene :

$$\frac{1}{21} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\,(7 + 7\,r\cos\vartheta + 3 + 3\,r\,\mathrm{sen}\vartheta + 11)\, d\vartheta =$$

$$\frac{1}{21} \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (21\,r + 7\,r^2 \cos\vartheta + 3\,r\,\mathrm{sen}\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$2\pi \int_0^1 r\,dr = \pi.$$

3.

Ricaviamo z dalla seconda equazione : z = -y e sostituiamo nella prima : $x^2 + y^2 = 2$.

La curva può essere rappresentata in forma parametrica da :

$x = \sqrt{2}\cos\vartheta$, $y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\vartheta$, $z = -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\vartheta$ con 0 ≤ ϑ ≤ 2π

(che ha l'orientamento richiesto). La circuitazione è data da :

$$\int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\vartheta, \sqrt{2}\cos\vartheta - 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\vartheta, \sqrt{2}\cos\vartheta + 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\vartheta)\cdot(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\vartheta, \sqrt{2}\cos\vartheta, -\sqrt{2}\cos\vartheta)\, d\vartheta$$

ovvero

$$\int_0^{2\pi} (-2 - 6\,\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta)\, d\vartheta = -4\pi .$$

Ritroviamo il risultato calcolando il flusso del rotore uscente dalla superficie definita da $5x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 10$, $y + z = 0$ ovvero $x^2 + y^2 \le 2$, $z = -y$; questa può essere parametrizzata nella forma $x = r\cos\vartheta$, $y = r\,\mathrm{sen}\vartheta$, $z = -r\,\mathrm{sen}\vartheta$ (con $0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$). Poiché

rot F = (-1 , -1 , -1) , $\Phi_r \times \Phi_\vartheta = (0, r, r)$,

il flusso è dato da :

$$\int_0^{\sqrt{2}} -2\,r\,dr \int_0^{2\pi} d\vartheta = -4\pi .$$

4.

Se $x \neq 0$, per $n \to +\infty$ $f_n(x) \approx \dfrac{2^n x^2}{n\,2^n x^3} = \dfrac{1}{n\,x} \to 0$

Se $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$.

Dunque la successione tende puntualmente a 0.

Fissato n, studiamo la funzione $f_n(x)$.

$f_n(0) = 0$; per $x \to +\infty$ $f_n(x) \approx 1/(n\,x) \to 0$

$f_n'(x) = 2^{n+1}\,x\,\dfrac{1 - n\,2^{n-1}x^3}{(1 + 2^n\,n\,x^3)^2} \ge 0$ per $x \le 1/\sqrt[3]{n\,2^{n-1}}$.

Dunque $\| f_n \| = f\,(1/\sqrt[3]{n\,2^{n-1}}) = \dfrac{2^{(n+2)/3}}{3\,n^{2/3}} \to +\infty$.

Questo prova che la convergenza non è uniforme.

Restringiamo il dominio ad una semiretta [a , +∞). Poiché definitivamente il punto di massimo trovato diventa minore di a, si ottiene :

$$\| f_n \|_{[a,+\infty)} = f_n(a) = \frac{2^n a^2}{1 + n\,2^n a^3} \approx \frac{1}{n\,a} \to 0$$

che fornisce la convergenza uniforme in ogni semiretta [a , +∞) con a > 0.