Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
2 febbraio 2018
Esame di analisi II – versione A civili.

Esercizio PPP Siano X ed Y due variabili aleatorie discrete e **indipendenti**. Si sa inoltre che X assume i valori $-2,-1,0,1,2$ con ugual probabilità, mentre Y assume i valori $-2,2$ con ugual probabilità. Si definiscano le variabili aleatorie $S := X+Y$ e $T := XY$.

(i) Calcolare media e varianza delle variabili aleatorie S e T.

(ii) Calcolare il *coefficiente di correlazione* tra S e S.

(iii) Dire se S e T sono indipendenti.

[i] Da un calcolo diretto si ottiene che $E[X] = E[Y] = 0$ mentre $\mathrm{Var}(X) = 10/5 = 2$ e $\mathrm{Var}(Y) = 8/2 = 4$. Pertanto, avremo che

$$E[S] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 0, \quad E[T] = E[XY] = E[X]E[Y] = 0$$

dove nella seconda formula abbiamo usato il fatto che X e Y sono indipendenti.

Analogamente

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S) = \quad & E[S^2] - E[S]^2 = E[X^2] + 2E[X]E[Y] + E[Y^2] = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 6\\ \mathrm{Var}(T) = \quad & E[T^2] - E[T]^2 = E[X^2Y^2] = E[X^2]E[Y^2] = \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y) = 8\end{aligned}$$

(nella seconda riga abbiamo usato il fatto che X^2 ed Y^2 sono indipendenti).

[ii] Per calcolare il coefficiente di correlazione osserviamo che il fatto che X ed Y siano indipendenti implica che anche le coppie X^2, Y e X, Y^2 sono indipendenti; si avrà dunque che

$$\begin{aligned}\mathrm{Covar}(S,T) &= E[(S-E(S))(T-E[T])] = E[ST] = E[XY(X+Y)]\\ &= E[X^2Y] + E[XY^2] = E[X^2]E[Y] + E[X]E[Y^2] = 0,\end{aligned}$$

Dato che la covarianza è nulla, il coefficiente di correlazione è zero.

[iii] Le due variabili aleatorie S e T **non** sono indipendenti. Infatti $P(S=0, T=0) = 0$ ma, dato che $P(T=0) = 1/5$ e $P(S=0) = 1/5$ si ha $P(S=0)P(T=0) = 1/25 \neq 0$.

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile

2 febbraio 2018

Esame di analisi II – versione B civili.

Esercizio PPP Siano X ed Y due variabili aleatorie discrete e **indipendenti**. Si sa inoltre che X assume i valori $-2, -1, 1, 2$ con ugual probabilità, mentre Y assume i valori $-3, 0, 3$ con ugual probabilità. Si definiscano le variabili aleatorie $S := X + Y$ e $T := XY$.

(i) Calcolare media e varianza delle variabili aleatorie S e T.

(ii) Calcolare il *coefficiente di correlazione* tra S e S.

(iii) Dire se S e T sono indipendenti.

[i] Da un calcolo diretto si ottiene che $E[X] = E[Y] = 0$ mentre $\mathrm{Var}(X) = 10/4 = 5/2$ e $\mathrm{Var}(Y) = 18/3 = 6$. Pertanto, avremo che

$$E[S] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 0, \quad E[T] = E[XY] = E[X]E[Y] = 0$$

dove nella seconda formula abbiamo usato il fatto che X e Y sono indipendenti.

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) = \quad & E[S^2] - E[S]^2 = E[X^2] + 2E[X]E[Y] + E[Y^2] = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 17/2 \\ \mathrm{Var}(T) = \quad & E[T^2] - E[T]^2 = E[X^2Y^2] = E[X^2]E[Y^2] = \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y) = 15 \end{aligned}$$

(nella seconda riga abbiamo usato il fatto che X^2 ed Y^2 sono indipendenti).

[ii] Per calcolare il coefficiente di correlazione osserviamo che il fatto che X ed Y siano indipendenti implica che anche le coppie X^2, Y e X, Y^2 sono indipendenti; si avrà dunque che

$$\begin{aligned} \mathrm{Covar}(S,T) &= E[(S - E(S))(T - E[T])] = E[ST] = E[XY(X+Y)] \\ &= E[X^2Y] + E[XY^2] = E[X^2]E[Y] + E[X]E[Y^2] = 0, \end{aligned}$$

Dato che la covarianza è nulla, il coefficiente di correlazione è zero.

[iii] Le due variabili aleatorie S e T **non** sono indipendenti. Infatti $P(S = 5, T = 0) = 0$ ma, dato che $P(T = 0) = 1/3$ e $P(S = 5) = 1/12$ si ha $P(S = 5)P(T = 0) = 1/36 \neq 0$.