Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
12 gennaio 2018
Compitino di analisi II – versione A civili .

Esercizio 4 Il contenuto di nicotina delle sigarette prodotte da un'azienda viene modellizzato da una variabile aleatoria di media $\mu = 2.5mg$ e deviazione standard $\sigma = 0.5mg$.
Calcolare la probabilità che la misura del contenuto medio di nicotina effettuata su un campione casuale di 100 sigarette produca un valore superiore a $2.6mg$.

Siano $X_1, ..., X_n$ (con $n = 100$) le variabili aleatorie che descrivono i risultati delle 100 misurazioni; è ragionevole pensare che i risultati delle varie misurazioni siano indipendenti (ed identicamente distribuiti). Dal testo sappiamo anche che per ogni $1 \leq j \leq 100$

$$E[X_j] = \mu, \quad Var(X_j) = \sigma^2$$

con $\mu = 2.5mg$ e $\sigma = 0.5mg$.

Il quesito dell'esercizio chiede di stimare $P(M_n > 2.6)$, dove M_n è la variabile aleatoria "media campionaria": $M_n := \frac{1}{n}S_n$, con $S_n := X_1 + ... + X_n$. Dato che

$$P(M_n > 2.6) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{n} > 2.6 - \mu\right) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{\sqrt{n}(2.6 - \mu)}{\sigma}\right)),$$

possiamo utilizzare il teorema del limite centrale, che ci permette di approssimare la legge della variabile aleatoria $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ con la legge normale standard, ottenendo che

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} > \delta\right) = 1 - \Phi(\delta).$$

Applicando tale formula con $\delta = \frac{\sqrt{n}(2.6-\mu)}{\sigma} = 2$ otteniamo che

$$\frac{\sqrt{n}(2.6 - \mu)}{\sigma} = 1 - \Phi(2) = 0.02275$$

(il valore $\Phi(2) = 0.97725$ è ricavato dalla tabella).

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
12 gennaio 2018 **Compitino di analisi II - versione B civili.**

Esercizio 4 Il contenuto di nicotina delle sigarette prodotte da un'azienda viene modellizzato da una variabile aleatoria di media $\mu = 3.5mg$ e deviazione standard $\sigma = 0.8mg$.
Calcolare la probabilità che la misura del contenuto medio di nicotina effettuata su un campione casuale di 100 sigarette produca un valore superiore a $3.7mg$.

Siano $X_1, ..., X_n$ (con $n = 100$) le variabili aleatorie che descrivono i risultati delle 100 misurazioni; è ragionevole pensare che i risultati delle varie misurazioni siano indipendenti (ed identicamente distribuiti). Dal testo sappiamo anche che per ogni $1 \leq j \leq 100$

$$E[X_j] = \mu, \quad Var(X_j) = \sigma^2$$

con $\mu = 3.5mg$ e $\sigma = 0.8mg$.

Il quesito dell'esercizio chiede di stimare $P(M_n > 3.7)$, dove M_n è la variabile aleatoria "media campionaria": $M_n := \frac{1}{n}S_n$, con $S_n := X_1 + ... + X_n$. Dato che

$$P(M_n > 3.7) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{n} > 3.7 - \mu\right) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{\sqrt{n}(3.7 - \mu)}{\sigma}\right)),$$

possiamo utilizzare il teorema del limite centrale, che ci permette di approssimare la legge della variabile aleatoria $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ con la legge normale standard, e in particolare

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} > \delta\right) = 1 - \Phi(\delta).$$

Applicando tale formula con $\delta = \frac{\sqrt{n}(3.7-\mu)}{\sigma} = 2.5$ otteniamo che

$$\frac{\sqrt{n}(3.7 - \mu)}{\sigma} = 1 - \Phi(2.5) = 0.00621$$

(il valore $\Phi(2.5) = 0.99379$ è ricavato dalla tabella).