(A) Si stima che, in media, il tempo di attesa (misurato in secondi) delle telefonate che arrivano al call center di una compagnia sia uguale a $\mu = 55$. Supponiamo di modellizzare tale tempo medio mediante una variabile aleatoria continua X con legge esponenziale (i.e. con funzione densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x > 0$ e nulla altrimenti). Quale valore dobbiamo assegnare al parametro λ ? Utilizzare questo modello per calcolare le quantità $\mathrm{Var}(X)$ e $P(X > \mu)$.
Un utente che deve fare tre distinte telefonate a questo centralino modellizza il proprio tempo d'attesa complessivo come una variabile aleatoria $Y = X_1 + X_2 + X_3$ dove le X_i sono variabili aleatorie indipendenti di legge esponenziale (come al punto precedente).
Calcolare le quantità $E[Y]$, $\mathrm{Var}(Y)$, $P(Y \geq E[Y])$.

Se X è una variabile aleatoria di legge esponenziale con parametro λ si ha $E[X] = 1/\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$. Di conseguenza dovrà essere $\lambda = 1/55$, e $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2 = 55^2$.

Inoltre

$$P(X \geq 1/\lambda) = \int_{1/\lambda}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_1^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-1}.$$

È immediato ottenere che $E[Y] = 3\mu = 3 \cdot 55 = 165$ e, dato che le X_i sono indipendenti, $\mathrm{Var}(Y) = 3 \cdot 55^2$. Osserviamo inoltre che una legge esponenziale di parametro λ è una legge $\Gamma(\alpha, \lambda)$ con $\alpha = 1$. Pertanto Y è somma di tre variabili aleatorie indipendenti di legge $\Gamma(1, \lambda)$ (con $\lambda = 1/55$ - ma per questo conto il particolare valore numerico di λ non è rilevante), e quindi segue la legge $\Gamma(3, \lambda)$, ovvero ha densità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto

$$P(Y \geq E[Y]) = \int_{3/\lambda}^{+\infty} \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} = \int_3^{+\infty} \frac{y^2}{2} e^{-y} dy$$

Integrando (due volte) per parti il membro sinistro dell'ultima equazione otteniamo $P(Y \geq E[Y]) = e^{-3}(9/2 + 3 + 1) = \dfrac{17}{2} e^{-3}$.

(B) Si stima che, in media, il tempo di attesa (misurato in secondi) delle telefonate che arrivano al call center di una compagnia sia uguale a $\mu = 70$. Supponiamo di modellizzare tale tempo medio mediante una variabile aleatoria continua X con legge esponenziale (i.e. con funzione densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x > 0$ e nulla altrimenti).
Quale valore dobbiamo assegnare al parametro λ ? Utilizzare questo modello per calcolare le quantità $\mathrm{Var}(X)$ e $P(X > \mu)$.
Un utente che deve fare tre distinte telefonate a questo centralino modellizza il proprio tempo d'attesa complessivo come una variabile aleatoria $Y = X_1 + X_2 + X_3$ dove le X_i sono variabili aleatorie indipendenti di legge esponenziale (come al punto precedente).
Calcolare le quantità $E[Y], \quad \mathrm{Var}(Y), \quad P(Y \geq E[Y])$.

Se X è una variabile aleatoria di legge esponenziale con parametro λ si ha $E[X] = 1/\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$. Di conseguenza dovrà essere $\lambda = 1/70$, e $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2 = 70^2$.

Inoltre

$$P(X \geq 1/\lambda) = \int_{1/\lambda}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{1}^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-1}.$$

È immediato ottenere che $E[Y] = 3\mu = 3 \cdot 70 = 210$ e, dato che le X_i sono indipendenti, $\mathrm{Var}(Y) = 3 \cdot 70^2$. Osserviamo inoltre che una legge esponenziale di parametro λ è una legge $\Gamma(\alpha, \lambda)$ con $\alpha = 1$. Pertanto Y è somma di tre variabili aleatorie indipendenti di legge $\Gamma(1, \lambda)$ (con $\lambda = 1/70$ - ma per questo conto il particolare valore numerico di λ non è rilevante), e quindi segue la legge $\Gamma(3, \lambda)$, ovvero ha densità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto

$$P(Y \geq E[Y]) = \int_{3/\lambda}^{+\infty} \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} = \int_{3}^{+\infty} \frac{y^2}{2} e^{-y} dy$$

Integrando (due volte) per parti il membro sinistro dell'ultima equazione otteniamo $P(Y \geq E[Y]) = e^{-3}(9/2 + 3 + 1) = \dfrac{17}{2} e^{-3}$.