Soluzioni

1. Il campo è definito nella regione di spazio esterna al cilindro retto che si proietta nel piano xy secondo il cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio 1. Poichè questa regione è connessa, ma non semplicemente, l'irrotazionalità del campo non è sufficiente a garantire che sia conservativo. Per stabilirlo, basta calcolare il lavoro su una curva chiusa non contrattile e vedere se vale 0. Possiamo ad esempio prendere la circonferenza $z=0$, $x^2+y^2+2y=3$, che si parametrizza con $\varphi(t) = (2\cos\theta, -1+ 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$ $(0\le\theta\le 2\pi)$. Essendo $F(\varphi(\theta)) = (0,0,\lg\sqrt{3})$, $\varphi'(\theta) = (-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{3}\cos\theta, 0)$, e dunque $F\cdot\varphi' = 0$, il lavoro è nullo.
Il campo è dunque conservativo. Procedendo nel modo consueto, si trova un potenziale $U = z\lg\sqrt{x^2+y^2+2y}$.
Per calcolare il flusso richiesto, si può ricorrere al teorema della divergenza

$$\Phi = \iiint_D \mathrm{div}F\,dx\,dy\,dz,$$

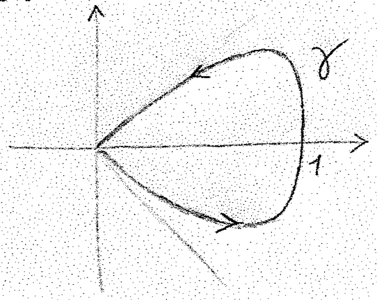
essendo D la regione definita da

$$4 \le x^2+(y+1)^2 \le 9, \quad -1\le z\le 1.$$

Poichè $\mathrm{div}F = -2z/(x^2+y^2+2y)^2$, si ottiene:

$$\Phi = \iint_{4\le x^2+(y+1)^2\le 9} -2/(x^2+y^2+2y^2)^2\,dx\,dy \int_{-1}^{1} z\,dz = 0.$$

2.
- $\varphi(\pm\pi/4) = (0,0)$ la curva è chiusa
- $\begin{cases}\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta = \sqrt{\cos 2\alpha}\cos\alpha\\ \sqrt{\cos 2\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{\cos 2\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha\end{cases}$ Elevando al quadrato e sommando membro a membro, si ottiene $\cos 2\theta = \cos 2\alpha$ e quindi $\cos\theta = \cos\alpha$, $\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\alpha$, cioè $\theta = \alpha$.
La curva è dunque semplice.
- $\varphi'(\theta) = \left(-\dfrac{\mathrm{sen}\,2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos\theta - \sqrt{\cos 2\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -\dfrac{\mathrm{sen}\,2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{sen}\,\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\right)$
non è definito per $\theta = \pm\pi/4$, cioè solo agli estremi. La curva non è dotata di versore tangente nell'origine.



- $x(-\theta) = x(\theta)$, $y(-\theta) = -y(\theta)$.
- $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\gamma^+} x\,dy - y\,dx = \dots = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta$
$= \dfrac{1}{4}\left[\mathrm{sen}\,2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}$

D^*: $0\le r\le\sqrt{\cos 2\theta}$, $0\le\theta\le\pi/4$

- $A = 2\displaystyle\iint_D dx\,dy = 2\iint_{D^*} r\,dr\,d\theta$
$= 2\displaystyle\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr = \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta = \frac{1}{2}$.

3. $y=0$ slz. costante

$$\int \frac{\cos y}{\sqrt{\operatorname{sen} y}}\, dy = \int \sqrt{x}\, dx \longrightarrow 2\sqrt{\operatorname{sen} y} = \frac{2}{3}\left(x^{3/2}+c\right)$$

$$\sqrt{\operatorname{sen} y} = \frac{1}{3}\left(x^{3/2}+c\right)$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{9}\left(x^{3/2}+c\right)^2$$

$$y = \operatorname{arcsen} \frac{\left(x^{3/2}+c\right)^2}{9}$$

con la condizione $0 \le \frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}+c\right) < 1$

cioè $0 \le x^{3/2}+c < 3$, $-c \le x^{3/2} < 3-c$

se $0 \le c < 3 \rightarrow 0 \le x < \sqrt[3]{(3-c)^2}$

$c < 0$ $\qquad \sqrt[3]{-c^2} \le x < \sqrt[3]{(3-c)^2}$