Esercizi di preparazione al compito parziale #1

Foglio #2

1. Data la funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{y - x}$

- trovare i punti stazionari e precisare se sono di massimo o minimo (locale o assoluto). Ottenere la risposta in due modi diversi: prima usando la matrice hessiana, poi con un esame diretto o per restrizioni.
- dire se ha limite all'infinito
- trovarne il valore massimo e minimo sul cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 1.

Successivamente si consideri la funzione $g(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{|y| - x}$

- discuterne la derivabilità
- provare che è differenziabile nell'origine.

2. Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = y / x$ nel dominio definito dalle condizioni

$y^2 \le x \le y \;,\quad 9(x^2 + y^2) \ge 4.$

3. Trovare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse delle x della regione di piano compresa nel primo quadrante e delimitata dalle condizioni :

$y \le x \;,\; x^2 + y^2 - x \ge 0 \;,\; x^2 + y^2 - 2x \le 0$

Lo stesso per la rotazione attorno all'asse delle y.

4. Data la funzione $f(x, y) = x y^3 - x^2 y^2 + 2 x y^2 - 2 y^3$, studiarne il segno e gli zeri, riportando i risultati nel piano cartesiano.

Dire se ammette limite all'infinito.

Studiarne gli eventuali punti di massimo e minimo locale.

Trovarne il massimo e minimo nell'insieme definito da $x + 3y \ge 0 \;,\; y \le x \le 3$.

5. Trovare il baricentro dell'insieme dello spazio descritto dalle disequazioni: $x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2)$, $z \le 1$.

6. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x y (x + y) / (x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dire se nel punto (0 , 0) è continua, è differenziabile, è di classe C^1.

7. Data la funzione $f(x, y) = \dfrac{\log(y - x^3)}{\sqrt{1 - xy}}$ disegnarne nel piano cartesiano il campo di esistenza; dire se è aperto, chiuso, connesso, limitato, compatto.

Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

calcolare gradf (0 , 0) o dire che non esiste.

8. Data la funzione $f(x, y) = x y^2$, scrivere l'equazione parametrica della retta normale al suo grafico nel punto corrispondente a $P_0 = (1, -1)$.

9. Calcolare $\displaystyle\iiint_A \frac{dx\, dy\, dz}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, essendo A il dominio individuato dalle condizioni :

$x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0$, $0 \leq y \leq x / \sqrt{3}$.

10. Trovare il volume del solido limitato compreso tra le superfici di equazione $2xz + y^2 = 0$ e $z - x = 1$. Nell'integrale effettuare i cambiamenti di variabili $u = (x + z) / \sqrt{2}$, $v = y$, $w = (z - x) / \sqrt{2}$.

11. Calcolare il momento di inerzia del cilindro pieno omogeneo di massa M, raggio R e altezza H:

- rispetto al suo asse
- rispetto ad una retta perpendicolare al suo asse e passante per il suo centro. Sugg.: scegliere il riferimento in modo che l'origine sia nel centro del cilindro e l'asse z coincida con il suo asse; come asse di rotazione si può assumere l'asse y.

12. Calcolare il baricentro della semisfera piena definita da $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$ avente densità di massa $\delta(x, y, z) = 1 + (z / R)$.