Calcolo differenziale – esercizi proposti N. 2

1. Calcolare massimo e minimo (se esistono) ed estremo superiore ed inferiore delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato; quando l'intervallo non è precisato è sottointeso che coincida con il C.E.

1. $\left| \operatorname{sen} x + \cos x \right|$; $x \in [0, \pi]$
2. $\log_{1/2} \operatorname{sen} x$; $x \in [\pi/6, 2\pi/3]$
3. $(4+x)/(1-x^2)$; $x \in (-1,1)$
4. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$; $x \in (\pi/4, \pi]$
5. $\dfrac{x}{\log x}$; $x \in (1, e^2]$
6. $\arccos \sqrt{2x - x^2}$
7. $\operatorname{arctg}(-x^2 + 4x + 21)$
8. $2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$
9. $\begin{cases} |4x-1| & \text{se } 0 \le x \le 1/2 \\ 2 + \log_{1/2} x & \text{se } 1/2 < x \le 4 \end{cases}$
10. $x \operatorname{tg}(\pi/x)$; $x \in [3, +\infty)$

2. Stabilire se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato; in caso di risposta affermativa trovare i punti che ne verificano la tesi, in caso di risposta negativa verificare se è possibile che la tesi sia ugualmente soddisfatta.

1. $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2}$; $x \in [-1, 7/9]$
2. $\sqrt[5]{|x+3|}$; $x \in [-6, 0]$
3. $(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)$; $x \in [-\pi/4, 0]$
4. $\begin{cases} x^2 + x & \text{se } -3 \le x \le 0 \\ 2x^2 + ax & \text{se } 0 < x \le 3/2 \end{cases}$

3. Data la funzione

$$f(x) = (\cos^3 x)^{1/\operatorname{tg}^3 x} \quad , \quad 0 < x < \pi/2$$

- calcolarne la derivata
- provare che la funzione può essere prolungata per continuità agli estremi dell'intervallo
- stabilire se la funzione così prolungata verifica le ipotesi del teorema di Rolle.

4. Stabilire se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo indicato ; in caso di risposta affermativa trovare i punti che ne verificano la tesi , in caso di risposta negativa verificare se è possibile che la tesi sia ugualmente soddisfatta.

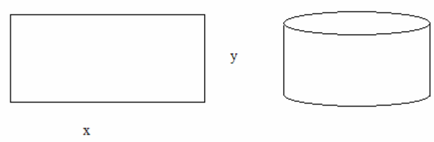
1. $\sqrt{|x^2 - 1|}$; $x \in [-1, 2]$
2. $\arcsen \dfrac{2x}{x^2+1}$; $x \in [0, 1]$
3. $\sqrt[3]{x-2}$; $x \in [1, 3]$
4. $\begin{cases} x - 1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \log x & \text{se } 1 < x \le e^2 \end{cases}$

5. Studiare le principali proprietà e tracciare il grafico delle seguenti funzioni

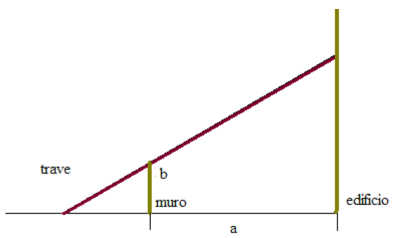
1. $\log \dfrac{(|x|-1)^2}{x+1}$
2. $|4x - 3x^2|\, e^{-2x}$
3. $\operatorname{sen} x + \cos 2x$
4. $\operatorname{arcsen} \sqrt{\dfrac{|2x-1|}{x^2}}$
5. $\log \left| \dfrac{x+1}{x-1} \right| - \dfrac{1}{x}$
6. $x\, e^{\sqrt{|x^2-1|}}$

6. Problemi di massimo e minimo

1. Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa data trovare quello di area massima.
2. Tra tutte le rette passanti per il punto P = (1 , 2) trovare quella che forma con i semiassi positivi un triangolo di area minima.
3. Una lamina rettangolare di perimetro 2H è arrotolata a formare un cilindro come in disegno. Trovare le dimensioni che forniscono il volume massimo.



4. Il muro rappresentato in figura è alto b (unità di misura) e dista a dall'edificio. Quanto vale la lunghezza della trave rettilinea più corta che raggiunge il fianco dell'edificio partendo dal suolo all'esterno del muro ?



5. Nel piano cartesiano sono dati la circonferenza di centro l'origine e raggio 4 e i punti R = (8 , 0) , S = (0 , 8) . Sulla semicirconferenza situata nel semipiano delle ordinate non negative trovare un punto P, in modo che sia massima oppure minima la somma dei quadrati delle sue distanze da R e da S .

6. Un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio R ruota attorno alla propria base ; trovare quale deve essere la sua altezza in modo che il solido generato abbia volume massimo .

7. Data la successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = k \quad , \quad x_{n+1} = e^{x_n} - 1$$

studiarne il limite, al variare del parametro reale k.

8. Date le funzioni

$$f_1(x) = x - 1 + \arccos x \quad , \quad f_2(x) = 2x + \cos x$$

provare che sono entrambe invertibili e calcolare la derivata delle funzioni inverse, la prima nel punto $y_0 = 0$, la seconda nel punto $y_0 = 1$.