Calcolo differenziale – soluzioni degli esercizi proposti N. 1

1.

1. $2x\cos(x^2)$
2. $2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = \mathrm{sen}\,2x$
3. $-\mathrm{tg}\,x$
4. $1/(x\log x)$
5. $2/(x(\log x+1)^2)$
6. $(\mathrm{sgn}\,x)(\mathrm{sen}\,x + x\cos x)$
7. $2x\ \mathrm{sgn}(x^2-1)$
8. $1/(|x|\sqrt{x^2-1})$
9. $(x+2)/(2(x+1)^{3/2})$
10. $1/(\mathrm{sen}\,x+\cos x)^2$
11. $-e^{1/x}/(2x^2\sqrt{1+e^{1/x}})$
12. $-1/(2\sqrt{(4-x)(x-3)})$

2.

1. $2/(1-x^2)$
2. $2/\mathrm{sen}\,2x$
3. $\cos 2x/\sqrt{1+\mathrm{sen}\,2x}$
4. $1+(x\,\mathrm{sgn}(x^2-1))/\sqrt{|x^2-1|}$
5. $\left(1+\mathrm{tg}^2(x+\mathrm{arctg}\,1/x)\right)\left(x^2/(1+x^2)\right)$
6. $2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)/(1+x^2)$
7. $-e^{1/\log x}/(x\log^2 x)$
8. $-e^{|x/(x-1)|}\mathrm{sgn}(x/(x-1))/(x-1)^2$
9. $-e^{\sqrt{|1-x^2|}}\,x\,\mathrm{sgn}(1-x^2)/\sqrt{|1-x^2|}$
10. $-\mathrm{sgn}(\mathrm{sen}\,x)/2$
11. $x^{\sqrt{x}}(\log\sqrt{x}+1)/\sqrt{x}$
12. $\left(1+(1/x)\right)^x\left(\log(1+(1/x)) - 1/(1+x)\right)$

3.

1. $-\dfrac{e^{1/x}}{x^2}\ ,\ -\dfrac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4}$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\ ,\ \dfrac{8x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$
3. $\log x+1\ ,\ 1/x$
4. $(\mathrm{sgn}\,x)\cos|x|\ ,\ -\mathrm{sen}|x|$
5. $-\mathrm{tg}\,x\ ,\ -1-\mathrm{tg}^2 x$
6. $(\mathrm{sgn}\,\mathrm{sen}\,x)\cos x - \mathrm{sen}|x|\ ,\ -|\mathrm{sen}\,x| - \cos x$
7. $\dfrac{-x\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{\sqrt{|1-x^2|}}\ ,\ \dfrac{-|1-x^2|-x^2}{\sqrt{|1-x^2|^3}}$
8. $\dfrac{-2\,\mathrm{sgn}\,x}{(|x|-1)^2}\ ,\ \dfrac{4}{(|x|-1)^3}$

4.

1. $y = x-(\pi/2)+1$
2. $y = x-(3/2)$
3. non esiste (punto angoloso)
4. $x = 2$ (punto a tg. verticale)
5. $x = -3$ (cuspide)
6. $y = x+(1/4)$
7. non esiste (punto angoloso)
8. $y = x$ solo se $a = 0$

5.

1. $2(x-2)/\sqrt{5}$
2. $\sqrt{3}(\pi/3 - x)$
3. $\sqrt{3}(x-\pi/6)$
4. non esiste

6.

1. $f(x) = (2+x)^3\ ,\ x_0 = 0\quad x = 0{,}01$

$f(x) \sim f(0)+f'(0)\,x = 8+12\cdot 0{,}01 = 8{,}12$; valore " esatto " 8,120601

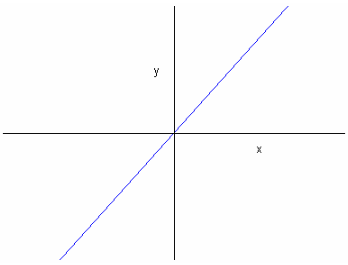
2. $31° = 30° + 1° = \pi / 6 + \pi / 180$ rad
$f(x) = \text{sen}(\pi/6 + x)$, $x_0 = 0$ $x = \pi / 180$
$f(x) \sim f(0) + f'(0)\, x = 1/2 + \sqrt{3}\, \pi / 360 = 0{,}515115$; valore " esatto " 0.468

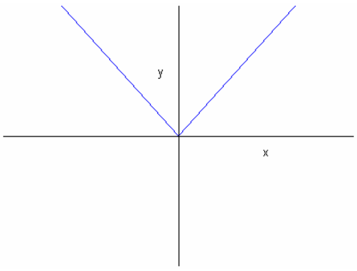
3. $f(x) = (1 + x)^{-1}$, $x_0 = 0$ $x = 0{,}01$
$f(x) \sim f(0) + f'(0)\, x = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$; valore " esatto " 0,99009

4. $f(x) = (64 + x)^{1/3}$, $x_0 = 0$ $x = 6$
$f(x) \sim f(0) + f'(0)\, x = 4 + 6 / 48 = 4{,}125$; valore " esatto " 4,12

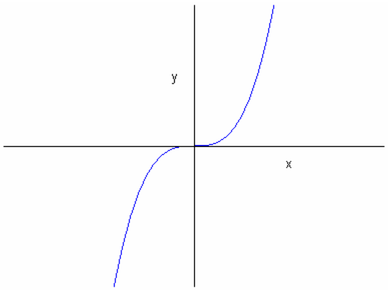
7.

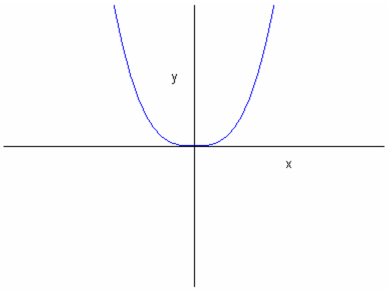
Dal punto di vista geometrico il grafico della funzione $|f(x)|$ si deduce da quello della funzione $f(x)$ ribaltando attorno all'asse x le parti situate nel semipiano negativo delle y . In questa operazione si possono formare dei punti angolosi (di non derivabilità) in corrispondenza dei punti sull'asse delle x che separano un intervallo di positività da uno di negatività .Si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = x$:





Questo non accade se nei punti in cui la funzione si annulla si annulla anche la derivata , come ad esempio per $f(x) = x^3$:





8.

Basta partire dalla definizione di funzione pari : $f(-x) = f(x)$ $\forall x$, e da quella di funzione dispari : $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$.
Derivando ambo i membri dell'identità , si trova nel primo caso $-f'(-x) = f'(x)$ (e quindi la derivata è dispari) , nel secondo caso $f'(-x) = f'(x)$ (e quindi la derivata è pari) .
Se poi nella definizione di funzione dispari si pone $x = 0$, si ottiene $f(0) = -f(0)$ e questo accade solo se $f(0) = 0$.

9.

1. Dobbiamo trovare un punto in cui $f'(x) = 0$; poiché $f'(x) = (\text{sgn} \log x)(1 - \log x) / x^2$, deve essere $\log x = 1$, cioè $x = e$.
2. Dobbiamo trovare un punto in cui $f'(x) = -1$; poiché $f'(x) = (x^2 + 4x - 1) / (x + 2)^2$, deve essere $(x^2 + 4x - 1) = -(x + 2)^2$, cioè $x = (-4 \pm \sqrt{10}) / 2$.

3. Dobbiamo trovare un punto a tangente verticale ; poiché $f'(x) = (4x)/(3\sqrt[3]{x^2-1})$, questo accade per $x = \pm 1$ (che sono due cuspidi) .
4. Poniamo $f(x) = x^2$ e $g(x) = m(x-1) - 3$; il grafico di $g(x)$ è la generica retta (non verticale) passante per il punto dato . Dobbiamo imporre risulti $f(x) = g(x)$, $f'(x) = g'(x)$ (cioè nei punti in cui le due funzioni " si incontrano " , devono avere la stessa derivata) .

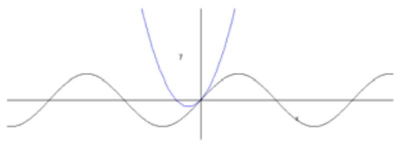
$$\begin{cases} x^2 = m(x-1) \\ m = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x = 3 \text{ oppure } x = -1$$

Si trova dunque $m = 6$ oppure $m = -2$; le rette richieste sono dunque quelle di equazioni

$$y = 6x - 9 \quad \text{oppure} \quad y = -2x - 1 \, .$$

10.

1. Le due curve si incontrano nel punto (1 , k); il prodotto delle derivate in questo punto deve essere -1 (condizione di perpendicolarità delle rette tangenti): questo significa che deve essere $-4k^2 = -1$, cioè $k = \pm ½$. In conclusione, se $k = ½$ le due curve sono normali nel punto (1 , ½), se $k = -½$ lo sono nel punto (1 , -½) .
2. Bisogna trovare una funzione $F(x)$ tale che $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$: una possibile scelta (non lineare) è data da $F(x) = x^2 + x$.



1. $f(x) = \text{sen}\, x \qquad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } n = 4k-3 \\ -\text{sen}\, x & \text{se } n = 4k-2 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k-1 \\ \text{sen}\, x & \text{se } n = 4k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbf{N}$

Provare che il risultato si può sintetizzare nella forma $\text{sen}(x + n\pi/2)$.

2. $f(x) = \cos x \qquad f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\text{sen}\, x & \text{se } n = 4k-3 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k-2 \\ \text{sen}\, x & \text{se } n = 4k-1 \\ \cos x & \text{se } n = 4k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbf{N}$

Provare che il risultato si può sintetizzare nella forma $\cos(x + n\pi/2)$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x} \qquad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\, n!}{(1+x)^{n+1}}$

4. $f(x) = e^{-2x} \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n\, 2^n\, e^{-2x}$.