

Nota: la prima parte del compito consta di un test della durata di circa 45' e sarà composta da 6 domande, delle quali bisogna dare **solo il risultato** giusto (risultati errati valgono zero). Di seguito trovate alcuni esempi di domande, raggruppate per tipologia.

1. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}, \quad g(x) = \log(1-x^2), \quad h(x) = x \log \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

2. Dire se esistono successioni limitate che non ammettono limite. In caso affermativo fornire un esempio.
3. Disegnare il grafico della funzione  $f(x) = \log(x^2 - x)$  [Sugg: dedurlo per passi successivi a partire da quello di funzioni note].
4. Date le funzioni  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = |x|$  calcolare la funzione composta  $f \circ g \circ f$ , precisandone il campo di esistenza.
5. Calcolare in forma cartesiana dei seguenti numeri complessi:

$$(i^7 + 1)^2, \quad (1 - i)^{-7}, \quad (i - 1)^5.$$

6. Sia  $z = e^{i\alpha}$  con  $\alpha := 7\pi/12$ . Calcolare in forma cartesiana  $z^2$ ,  $z^3$  e  $z^4$ .
7. Trovare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni
  - (i)  $z^3 = -i$ ;
  - (ii)  $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$ .
8. Dati  $z = 1 + i$  e  $w = 1 - i$ , calcolare  $z/w^2$  e  $z^2/w$ .
9. Dire quante sono le soluzioni complesse dell'equazione  $z^4 = 1$ .
10. Dire quante sono le soluzioni **reali** dell'equazione  $z^6 = 1$ .
11. Dire quante sono le soluzioni **reali** dell'equazione  $z^5 = -1$ .

12. Calcolare la somma

$$\sum_{k=1}^8 \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

13. Calcolare i seguenti limiti (per  $x \rightarrow 0$ ):

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1-x)}{3x}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{5x}$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{x \sin x}$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^{-x}}{\sin(2x)}$

(v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \log(|x|)$

(vi)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \log \sin x$

(vii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log|x| + \sin(1/x)}{3x}$

(viii)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\log|x|}$

14. Calcolare i seguenti limiti (per  $n \rightarrow +\infty$ ):

(i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{1+3x}$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3^n}{n!}$

(iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + \sin n}{1 + \log n}$

(iv)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \sin \frac{\pi}{2n}$

(v)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \cos \frac{1}{n})$

(vi)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2+1}$

(vii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \log n}{\log n! + 3n}$

(viii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos \frac{1}{n})^n$

15. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x / 2}{\log(1/x)}$$

16. Dire se la funzione

$$f(x) := \frac{e^{1/|x|}}{x^2}, \quad x \neq 0$$

è estendibile per continuità nell'origine.

17. Calcolare i limiti destro e sinistro in 0 della funzione  $f(x) = e^{1/x}$ .

18. Dare la definizione di punto di accumulazione di un insieme di numeri reali.