Analisi Matematica I - Prova scritta del 13.1.2021

Soluzioni [A]

1.

Risolvere l'equazione differenziale $y' = \dfrac{1+\operatorname{sen} y}{\cos y}$, $|y| < \pi/2$ e tracciare il grafico di alcune soluzioni significative , precisando il dominio di definizione.

Nessuna soluzione costante.

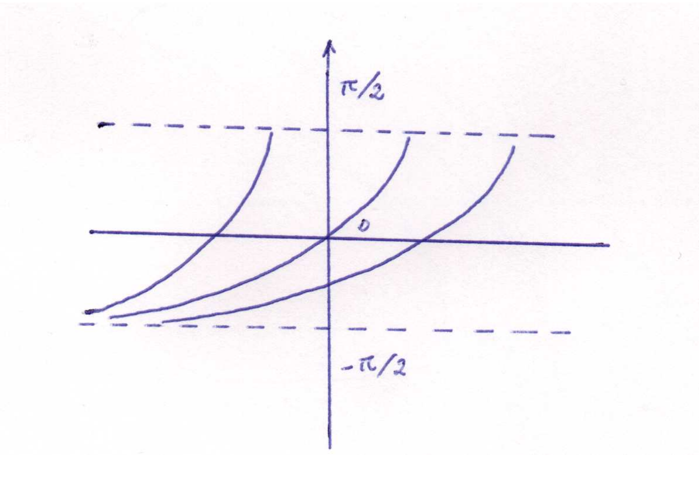
$$\int \frac{\cos y}{1+\operatorname{sen} y}\, dy = \int dx \iff \log(1+\operatorname{sen} y) = x + c \iff 1+\operatorname{sen} y = k\, e^{x} \quad (k = e^{c} > 0) \iff$$

$$y = \operatorname{arcsen}(k\, e^{x} - 1)$$

Deve essere $-1 < k\, e^{x} - 1 < 1 \iff e^{x} < 2/k \iff x < \log(2/k)$.

Tenendo conto della loro espressione , si verifica che tendono a $-\pi/2$ per $x \to -\infty$, a $\pi/2$ per $x \to \log(2/k)$, in questo caso con tangente verticale.

Dall'equazione ricaviamo che le funzioni sono crescenti nel loro dominio.



2.

Studiare la convergenza della successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = 0 \ , \quad x_{n+1} = -\frac{1}{4}\, x_n^{\,2} + x_n + \frac{1}{2} .$$

Successione ben definita.

$$x_{n+1} \geq x_n \iff -\frac{1}{4}x_n^2 + x_n + \frac{1}{2} \geq x_n \iff -\sqrt{2} \leq x_n \leq \sqrt{2}$$

La successione parte dal valore 0 e cresce; facciamo vedere che

$$0 < x_n < \sqrt{2} \Rightarrow 0 < x_{n+1} < \sqrt{2}.$$

Basta osservare che nell'intervallo considerato la funzione f (x) = $-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}$ è crescente (la derivata vale 1 – x/2) e che f (0) = ½ , f ($\sqrt{2}$) = $\sqrt{2}$.

Dunque la successione cresce e tende al punto fisso $\sqrt{2}$.

3.

Provare che per ogni fissato n$\in$ N l'equazione x^n = cosx , x $\in$ [0 , 1] ha una ed una sola soluzione x_n ; studiare il limite della successione x_n .

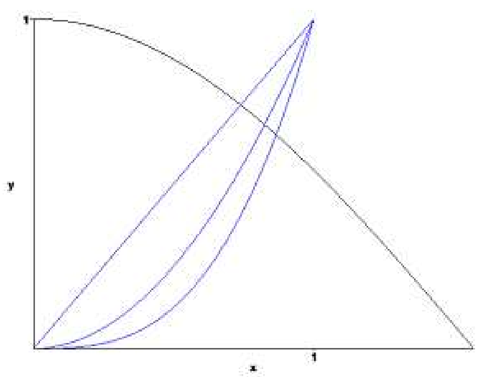
Posto f (x) = x^n - cosx , si ha f (0) = -1 < 0 , f (1) = 1 – cos1 > 0 .

La funzione è continua in [0 , 1] quindi ha almeno uno zero in tale intervallo (teorema degli zeri) .

Nell'intervallo la funzione è anche crescente (perché la derivata f' (x) = n x^{n-1} + senx è positiva) ; dunque si annulla una sola volta.

Questo equivale a dire che l'equazione data ammette una e una sola soluzione in [0 , 1].

Allo stesso risultato giungiamo studiando l'equazione per via grafica :



(i grafici riportati sono quelli di cosx, x , x^2 , x^3).

La figura precedente mostra che la successione x_n è crescente e si mantiene sempre nell'intervallo (0 , 1). Dunque ammette limite L $\in$ (0 , 1]. Se L non fosse 1 , passando al limite nell'uguaglianza $x_n^n = \cos x_n$ troveremmo 0 = cos L , che è falsa.

In conclusione, la successione tende ad 1 crescendo.

4.

Studiare la funzione f (x) = x + arcsen $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ e tracciarne il grafico.

Lo studio della derivata seconda è richiesto.

Dire se esiste finita l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asintoto a +∞ , a destra della retta x = 1.

C.E. | x | ≥ 1

Infatti deve essere :

$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{|x|} \geq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

LIMITI E VALORI NOTEVOLI

f (1) = 1 + π/2 , f (-1) = -1 + π/2

per x → ±∞ f (x) = x + o (1) ; la funzione tende a ±∞ con asintoto y = x

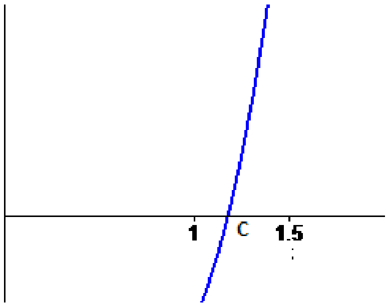
DRV

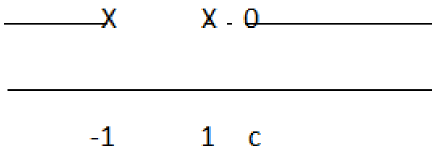
$$f'(x) = 1 - \frac{\operatorname{sgn} x}{2|x|\sqrt{|x|-1}}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|\sqrt{|x|-1}} \leq 2$$

Per le x negative è verificata.

Per le x positive (e quindi maggiori di 1) equivale a $1 \leq 4x^2(x-1) \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 - 1 \geq 0$, disequazione che si studia facilmente per via grafica.

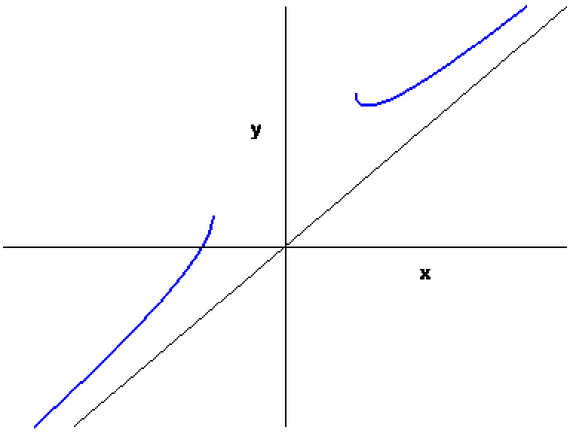




DRV[2]

$$f''(x) = \frac{3|x| - 2}{4x^2\sqrt{(|x|-1)^3}}$$

sempre positiva



Dobbiamo verificare se esiste finito l’integrale $\int_1^{+\infty} \arcsen \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$.

La risposta è negativa perché per x →+∞ $f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Analisi Matematica I - Prova scritta del 13.1.2021

Soluzioni [B]

1.

Risolvere l'equazione differenziale $y' = \dfrac{\operatorname{sen} y - 1}{\cos y}$, $|y| < \pi/2$ e tracciare il grafico di alcune soluzioni significative , precisando il dominio di definizione.

Nessuna soluzione costante.

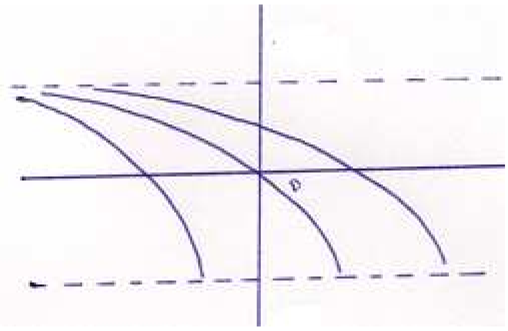
$$\int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y - 1}\, dy = \int dx \iff \log(1-\operatorname{sen} y) = x + c \iff 1-\operatorname{sen} y = k\, e^x \quad (k = e^c > 0) \iff$$

$$y = \operatorname{arcsen}(1 - k\, e^x)$$

Deve essere $-1 < 1 - k\, e^x < 1 \iff e^x < 2/k \iff x < \log(2/k)$.

Tenendo conto della loro espressione , si verifica che tendono a π/2 per x →-∞ , a -π/2 per x → log (2/k) in questo caso con tangente verticale.

Dall'equazione ricaviamo che le funzioni sono decrescenti nel loro dominio.



2.

Studiare la convergenza della successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = 0 \; , \quad x_{n+1} = -\frac{1}{4}\, x_n^{\,2} + x_n + \frac{1}{2}.$$

Successione ben definita.

$$x_{n+1} \geq x_n \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{4}x_n^{\,2} + x_n + \frac{1}{2} \geq x_n \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{2} \leq x_n \leq \sqrt{2}$$

La successione parte dal valore 0 e cresce; facciamo vedere che

$$0 < x_n < \sqrt{2} \;\Rightarrow\; 0 < x_{n+1} < \sqrt{2}.$$

Basta osservare che nell'intervallo considerato la funzione f (x) = $-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}$ è crescente (la derivata vale 1 – x/2) e che f (0) = ½ , f ($\sqrt{2}$) = $\sqrt{2}$.

Dunque la successione cresce e tende al punto fisso $\sqrt{2}$.

3.

Provare che per ogni fissato n∈ N l'equazione 1 - x^n = senx , x ∈ [0 , 1] ha una ed una sola soluzione x_n ; studiare il limite della successione x_n .

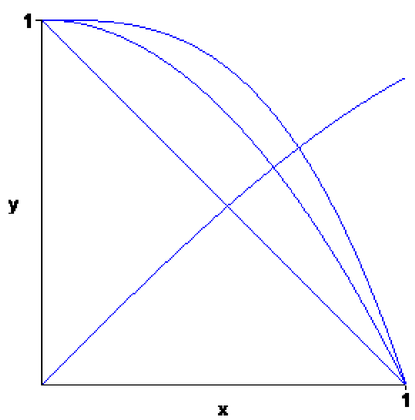
Posto f (x) = senx + x^n - 1 , si ha f (0) = -1 < 0 , f (1) = sen1 > 0 .

La funzione è continua in [0 , 1] quindi ha almeno uno zero in tale intervallo (teorema degli zeri).

Nell'intervallo la funzione è anche crescente (perché la derivata f' (x) = cosx + n x^{n-1} è positiva) ; dunque si annulla una sola volta.

Questo equivale a dire che l'equazione data ammette una e una sola soluzione in [0 , 1].

Allo stesso risultato giungiamo studiando l'equazione per via grafica :



(i grafici riportati sono quelli di senx , 1 -x , 1 - x^2 , 1 - x^3).

La figura precedente mostra che la successione x_n è crescente e si mantiene sempre nell'intervallo (0 , 1) . Dunque ammette limite $L \in (0 , 1]$. Se L non fosse 1 , passando al limite nell'uguaglianza $1 - x_n^n = \text{sen}\, x_n$ troveremmo 1 = sen L , che è falsa.

In conclusione, la successione tende ad 1 crescendo.

4.

Studiare la funzione $f (x) = x + \arccos \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ e tracciarne il grafico.

Lo studio della derivata seconda è richiesto.

Dire se esiste finita l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asintoto a $+\infty$, a destra della retta x = 1.

C.E. $| x | \geq 1$

Infatti deve essere :

$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{|x|} \geq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

LIMITI E VALORI NOTEVOLI

$f (1) = 1$, $f (-1) = -1$

per $x \to \pm\infty$ $f (x) = x + \pi/2 + o (1)$; la funzione tende a $\pm\infty$ con asintoto $y = x + \pi/2$

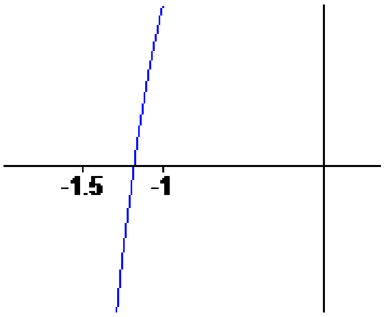
DRV

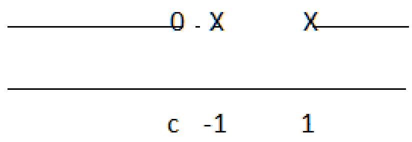
$$f'(x) = 1 + \frac{\text{sgn}x}{2|x|\sqrt{|x|-1}}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{sgn}x}{|x|\sqrt{|x|-1}} \geq -2$$

Per le x positive è verificata.

Per le x negative (e quindi minori di -1) equivale a $1 \leq 4 x^2 (- x - 1) \Leftrightarrow 4 x^3 + 4 x^2 + 1 \leq 0$, disequazione che si studia facilmente per via grafica.

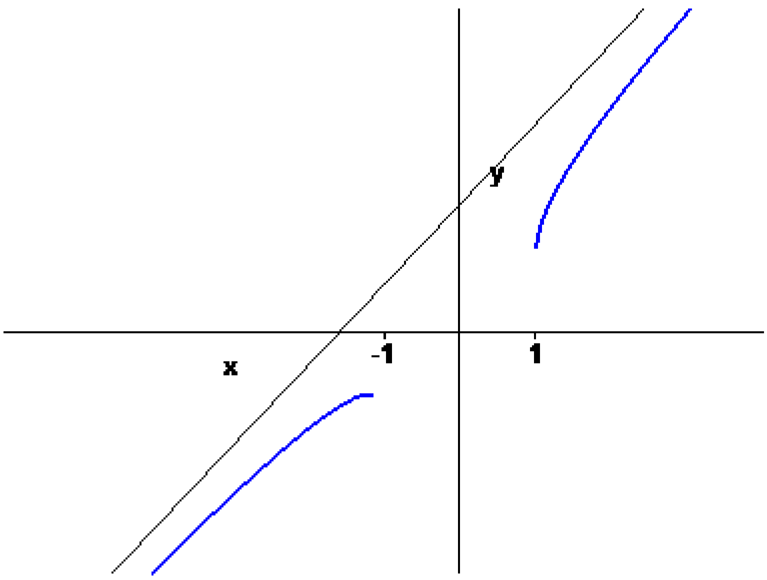




DRV[2]

$$f''(x) = \frac{2-3|x|}{4x^2\sqrt{(|x|-1)^3}}$$

sempre negativa



Dobbiamo verificare se esiste finito l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^{+\infty} \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \, .$$

La risposta è negativa perché per $x \to +\infty$ $f(x) \approx \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.