Soluzioni [A]

1 L'equazione è definita per $x \in \mathbf{R}$, $y \neq 0$.

Non ci sono soluzioni costanti ; per risolvere l'equazione, procediamo nel modo consueto , separando le variabili e integrando :

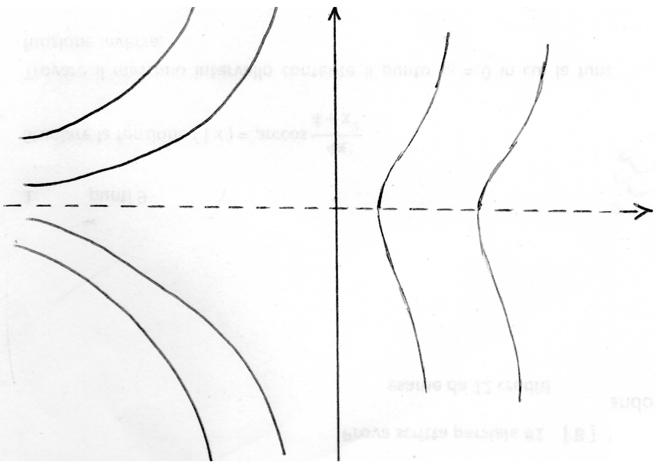
$$\int_{y_0}^{y} e^{-s^2}\, ds = \int_{x_0}^{x} e^{s}\, ds \quad \Leftrightarrow \quad e^{y^2} = 2\,(c - e^{x}) \qquad \left(c = e^{x_0} + e^{-y_0^2}/2 \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$y = \pm \sqrt{-\log(2\,(c - e^{x}))}$$

Le soluzioni sono definite per $0 < 2\,(c - e^x) < 1$, cioè per $c - ½ < e^x < c$; questo significa che :

per $0 < c \leq ½$ deve essere $x < \log c$

per $c > ½$ deve essere $\log(c - ½) < x < \log c$.



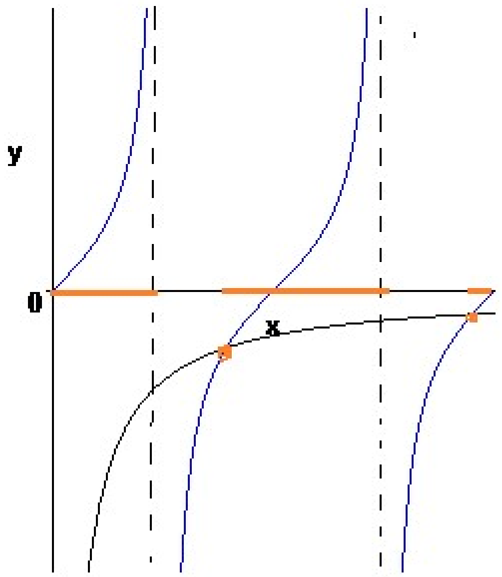
Si osservi che le soluzioni arrivano all'asse delle x, con tangente verticale.

2.

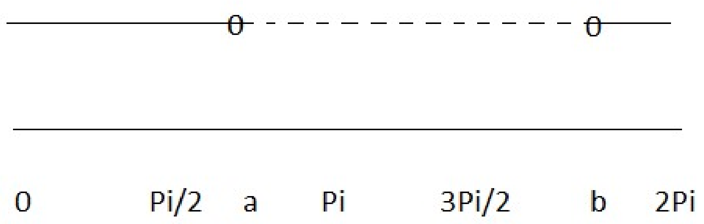
C.E. Funzione pari; possiamo limitarci a studiare la funzione per $x \in [0, 2\pi]$

SGN $x \operatorname{sen}x + 2\cos x \geq 0 \leftrightarrow x \cos x\,(\operatorname{tg}x + 2/x)$, $x \neq 0$, $x \neq \pi/2 + k\pi$

Per studiare il segno del termine in parentesi, confrontiamo il grafico di tgx con quello di -2/x (vedere figura ; gli intervalli in rosso sono quelli in cui il termine studiato è positivo; indichiamo con a, b le ascisse dei due punti di intersezione)



Tenendo conto anche del segno di cosx , il segno della funzione è quello indicato nella figura successiva:



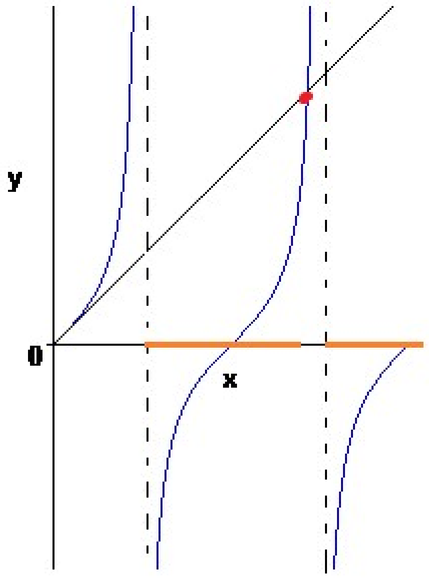
Valori notevoli

$f(0) = 2$, $f(\pi/2) = \pi/2$, $f(\pi) = -2$, $f(3\pi/2) = -3\pi/2$, $f(2\pi) = 2$

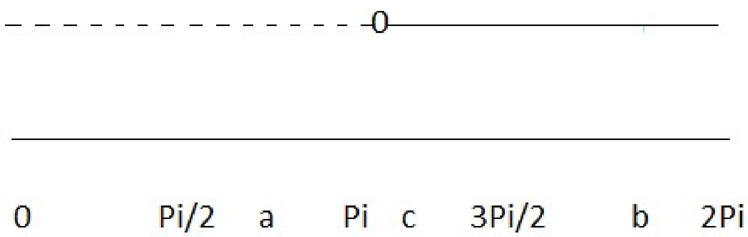
Derivata

$f'(x) = -\operatorname{sen}x + x\cos x$

Per studiarne il segno, riscriviamola nella forma cosx (x – tgx) (con esclusione dei punti in cui tgx non è definita) e iniziamo studiando il segno del termine in parentesi per confronto tra grafici:

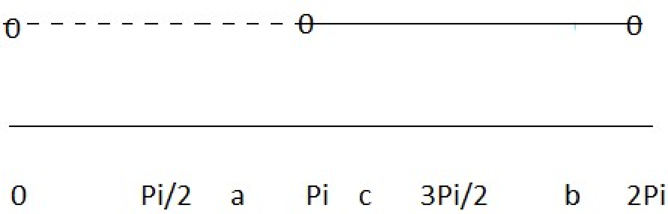


Gli intervalli in rosso sono quelli in cui il termine studiato è positivo; indichiamo con c l'ascissa del punto di intersezione diverso da 0). Tenendo conto anche del segno di cosx , il segno della funzione è quello indicato nella figura successiva:



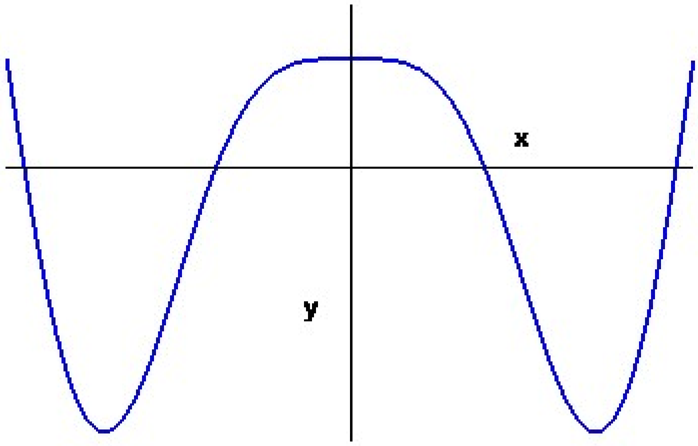
Derivata seconda

f " (x) = - x senx



Unico punto di flesso : π.

Grafico (sull'intero intervallo)



3.

<u>Studio di f (t)</u>

Definita per $t > 0$, $t \neq 1$

Negativa per $0 < t < 1$, positiva per $t > 1$

Non integrabile in nessun intorno di 0

$$f(t) \approx -\frac{\log^2 t}{t} \quad ; \quad \frac{\log^2 t}{t} > \frac{1}{t}$$

Integrabile in un intorno di 1

$$f(t) \approx \frac{t-1}{2} \quad ; \quad \text{discontinuità eliminabile}$$

Integrabile in un intorno di $+\infty$

$$f(t) \approx \frac{\log^2 t}{t^3} < \frac{t^\alpha}{t^3} = \frac{1}{t^{3-\alpha}} \quad ; \quad \text{scegliamo } \alpha \text{ tale che sia } 3-\alpha > 1, \text{ cioè } \alpha < 2$$

per concludere per confronto

<u>Studio di F (x)</u>

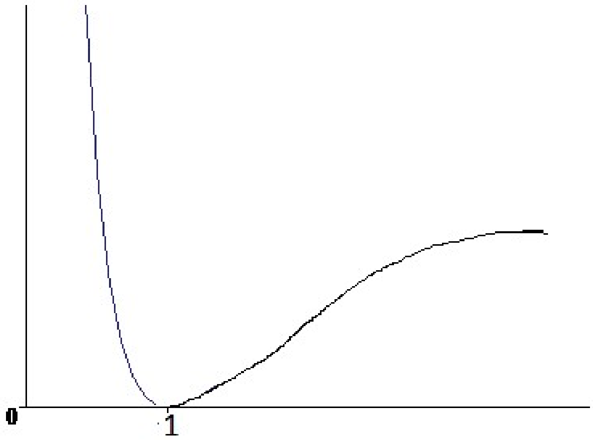
Definita per x > 0

Sempre positiva, nulla per x = 1

Limiti

per x → 0 F (x) → +∞ ; per x → +∞ F (x) → $c \in \mathbb{R}^+$

Derivata negativa per x < 1 , nulla per x = 1 , positiva per x > 1



4.

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\xi)^{8/3}}$$

$$\sqrt[3]{8,12} = 2\sqrt[3]{1+\frac{0,12}{8}} =$$

$$= 2 + \frac{2}{3}\,\frac{0,12}{8} - \frac{1}{9}\left(\frac{0,12}{8}\right)^2 + \frac{5}{81}\,\frac{1}{(1+\xi)^{8/3}}\left(\frac{0,12}{8}\right)^3 = 2,009930$$

Errore positivo = approssimazione per difetto

Valutazione dell’errore $0 < E < \frac{5}{81}\,\frac{0,2^3}{8^3} \approx 0,00000965 \approx 10^{-5}$.

Soluzioni [B]

1.

L'equazione è definita per $x \in \mathbf{R}$, $y \neq 0$.

Se y (x) è soluzione, anche – y (x) lo è. Non ci sono soluzioni costanti ; per risolvere l'equazione, procediamo nel modo consueto , separando le variabili e integrando :

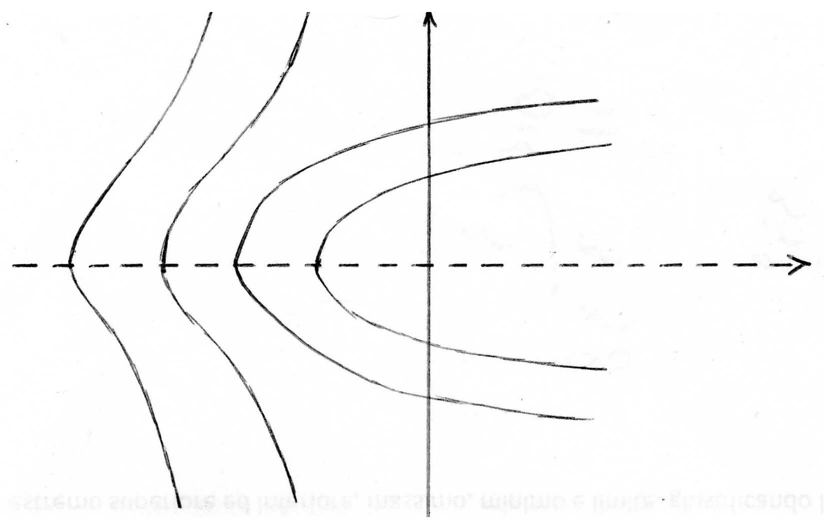
$$\int y e^{-y^2} dy = \int e^{-x} dx \Leftrightarrow -\frac{e^{-y^2}}{2} = -e^{-x} + c \Leftrightarrow e^{-y^2} = 2(e^{-x} - c)$$

$$y = y = \pm\sqrt{\log\frac{1}{2(e^{-x} - c)}}$$

Le soluzioni sono definite per $0 < 2(e^{-x} - c) < 1$, cioè per $c < e^{-x} < c + ½$; questo significa che :

per $-1/2 < c \leq 0$ deve essere $x > -\log(c + ½)$

per $c > 0$ deve essere $-\log(c + ½) < x < -\log c$.



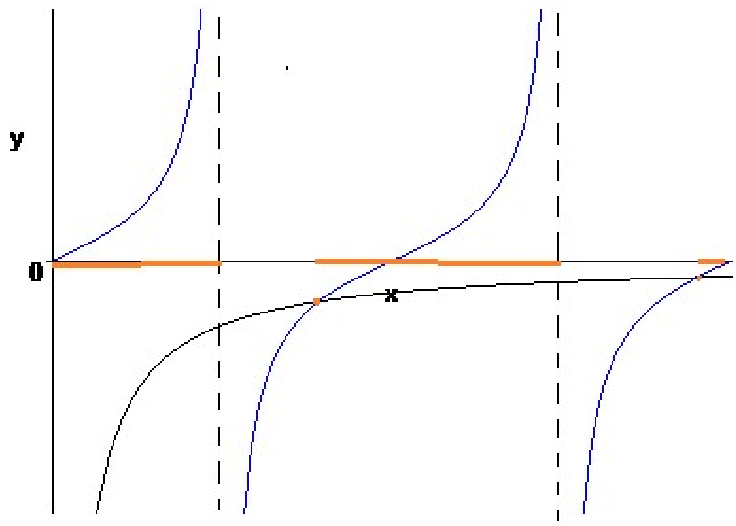
Si osservi che le soluzioni arrivano all'asse delle x, con tangente verticale.

2.

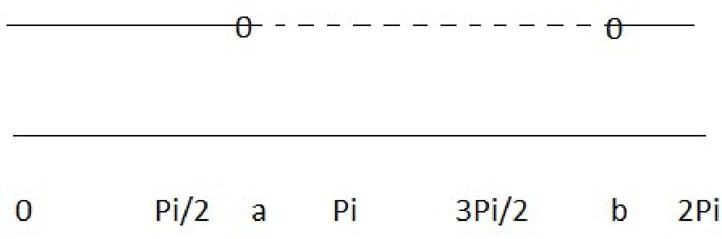
C.E. Funzione pari; possiamo limitarci a studiare la funzione per $x \in [\,0\,,\ \pi\,]$

SGN $x \operatorname{sen}2x + \cos 2x \geq 0 \leftrightarrow x \cos 2x\ (\operatorname{tg} 2x + 1/x)$, $x \neq 0$, $x \neq \pi/4 + k\,\pi/2$

Per studiare il segno del termine in parentesi, confrontiamo il grafico di tg2x con quello di -1/x (vedere figura ; gli intervalli in rosso sono quelli in cui il termine studiato è positivo; indichiamo con a, b le ascisse dei due punti di intersezione)



Tenendo conto anche del segno di cos2x , il segno della funzione è quello indicato nella figura successiva:



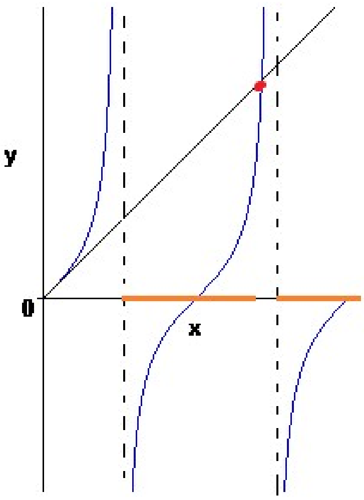
Valori notevoli

$f(0) = 1$, $f(\pi/4) = \pi/4$, $f(\pi/2) = -1$, $f(3\pi/4) = -3\pi/4$, $f(2\pi) = 1$

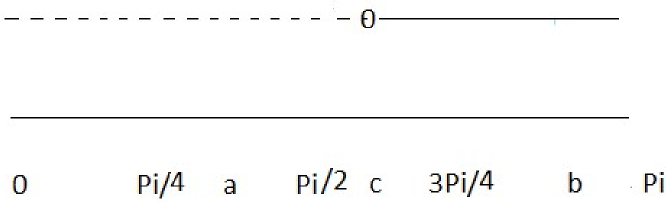
Derivata

f ‘ (x) = 2 x cosx - sen2x

Per studiarne il segno, riscriviamola nella forma cos2x (2x – tg2x) (con esclusione dei punti in cui tg2x non è definita) e iniziamo studiando il segno del termine in parentesi per confronto tra grafici:

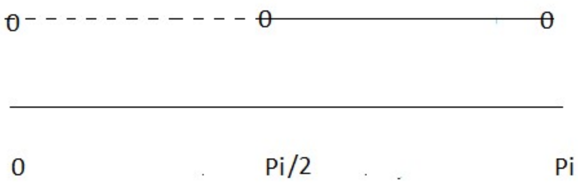


Gli intervalli in rosso sono quelli in cui il termine studiato è positivo; indichiamo con c l’ascissa del punto di intersezione diverso da 0). Tenendo conto anche del segno di cos2x , il segno della funzione è quello indicato nella figura successiva:



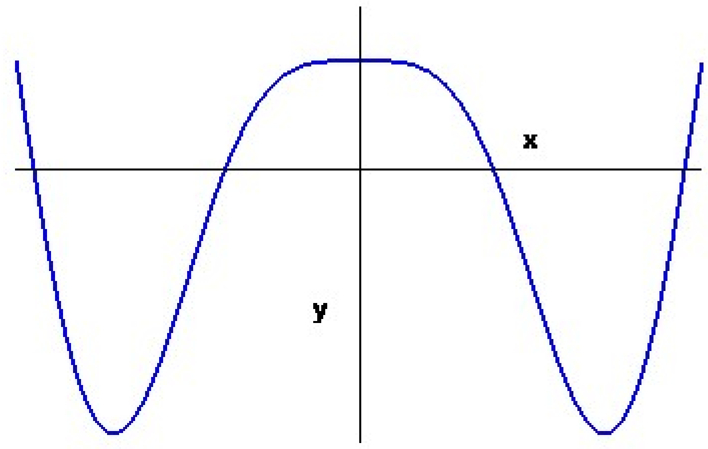
Derivata seconda

f “ (x) = - 4 x sen 2x



Unico punto di flesso : π/2 .

Grafico (sull'intero intervallo)



3.

<u>Studio di f (t)</u>

Definita per $t > 0$, $t \neq 1$

Positiva per $0 < t < 1$, negativa per $t > 1$

Non integrabile in nessun intorno di 0

$$f(t) \approx \frac{\log^2 t}{t} > \frac{1}{t}$$

Integrabile in un intorno di 1

$$f(t) \approx -\frac{t-1}{2} \quad ; \quad \text{discontinuità eliminabile}$$

Integrabile in un intorno di $+\infty$

$$f(t) \approx -\frac{\log^2 t}{t^3} \quad ; \quad \frac{\log^2 t}{t^3} < \frac{t^\alpha}{t^3} = \frac{1}{t^{3-\alpha}}$$; scegliamo α tale che sia $3 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 2$ per concludere per confronto

Studio di F (x)

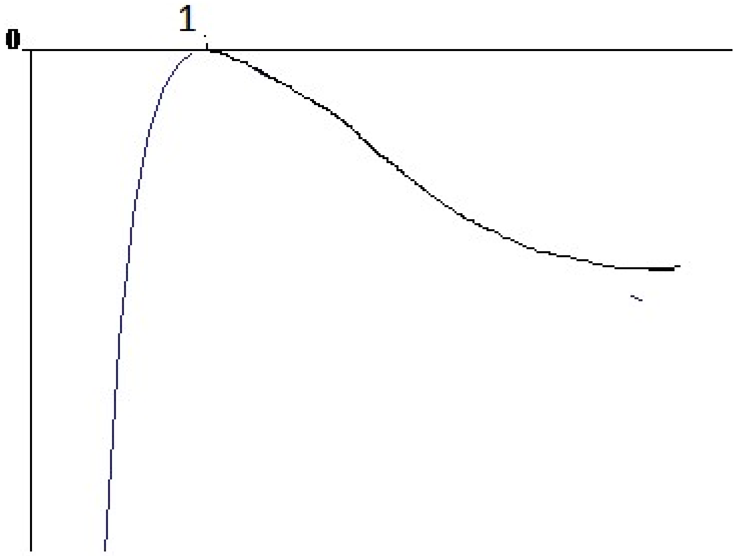
Definita per x > 0

Sempre negativa, nulla per x = 1

Limiti

per x → 0 F (x) → -∞ ; per x → +∞ F (x) → $c \in \mathbb{R}^-$

Derivata positiva per x < 1 , nulla per x = 1 , negativa per x > 1



4.

$$\sqrt[4]{1+x} = 1+\frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}\frac{x^3}{(1+\xi)^{11/4}}$$

$$\sqrt[4]{16,2} = 2\sqrt[4]{1+\frac{0,2}{16}} =$$

$$= 2+\frac{1}{2}\frac{0.2}{16} - \frac{3}{16}\left(\frac{0.2}{16}\right)^2 + \frac{7}{64}\frac{1}{(1+\xi)^{11/4}}\left(\frac{0.2}{16}\right)^3 \approx 2,0062207$$

Errore positivo = approssimazione per difetto

Valutazione dell'errore $0 < E < \frac{7}{64}\frac{0,2^3}{16^3} \approx 2\cdot 10^{-7}$.