Esercizio 3 Studiare la funzione

$$F(x) = \int_{-2}^{x} e^{-(t+1)^2} dt$$

determinando anche gli intervalli di convessità/concavità e flessi. Mostrare che l'equazione $F(x) = x$ ammette una ed una sola soluzione.
Studiare la convergenza della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita dalla relazione ricorsiva $x_0 = 0$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

Notiamo subito che $F(-2) = 0$, inoltre si ha che la derivata $F'(x) = e^{-(x+1)^2}$ è sempre positiva, quindi la funzione è crescente su tutto $\mathbb{R}$. La derivata seconda è $F''(x) = -2(x+1)e^{-(x+1)^2}$ è positiva su $(-\infty, -1)$ e negativa su $(-1, +\infty)$. Quindi F è convessa a sinistra di -1 e concava a destra di -1; il punto $x_0 = -1$ è punto di flesso.

Dato che $\int_{\mathbb{R}} e^{-(t+1)^2} dt < +\infty$ si ha che F è limitata. Osserviamo inoltre che $\lim_{x\to-\infty} F(x) - x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) - x = -\infty$, di conseguenza, per il teorema degli zeri, esiste un punto c in cui $F(c) - c = 0$. Tale punto è unico dato che la condizione $\frac{d}{dx}(F(x) - x) = e^{-(x+1)^2} - 1 < 0$ per ogni $x \neq -1$ implica che la funzione $x \mapsto F(x) - x$ è strettamente decrescente. Dal fatto che $F(0) > 0$ deduciamo che $c > 0$.

Per lo studio della successione definita per ricorrenza è utile osservare che $F(x) \geq x$ per ogni $x \leq c$, inoltre $F : (-\infty, c) \to (-\infty, c)$. Pertanto dato che $x_0 \in (-\infty, c)$ è immediato verificare per induzione che $x_n \in (-\infty, c)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e di conseguenza x_n è strettamente crescente. Dato che F è continua il limite della successione è il punto fisso di F: $\lim x_n = c$.

Esercizio 4 Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+3}}{(2+k^3)3^{2k-1}} x^k$$

Possiamo calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze utilizzando il criterio del rapporto.

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \frac{2^{k+5}}{(2+(k+1)^3)3^{2k+1}} \frac{(2+k^3)3^{2k-1}}{2^{k+3}} \to 2/9$$

Pertanto $R = 9/2$, e la serie converge per $|x| < 9/2$, non converge per $|x| > 9/2$.

Per $|x| = 9/2$ la serie è assolutamente convergente in quanto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{24}{(2 + k^3)} < +\infty$$

Esercizio 3 Studiare la funzione

$$F(x) = \int_3^x e^{-(t-1)^2} dt$$

determinando anche gli intervalli di convessità/concavità e flessi. Mostrare che l'equazione $F(x) = x$ ammette una ed una sola soluzione.
Studiare la convergenza della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita dalla relazione ricorsiva $x_0 = 0$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

Notiamo subito che $F(3) = 0$, inoltre si ha che la derivata $F'(x) = e^{-(x-1)^2}$

è sempre positiva, quindi la funzione è crescente su tutto $\mathbb{R}$. La derivata seconda è $F''(x) = -2(x-1)e^{-(x-1)^2}$ è positiva su $(-\infty, 1)$ e negativa su $(1, +\infty)$. Quindi F è convessa a sinistra di 1 e concava a destra di 1; il punto $x_0 = 1$ è punto di flesso.

Dato che $\int_{\mathbb{R}} e^{-(t-1)^2} dt < +\infty$ si ha che F è limitata. Osserviamo inoltre che $\lim_{x\to-\infty} F(x) - x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) - x = -\infty$, di conseguenza, per il teorema degli zeri, esiste un punto c in cui $F(c) - c = 0$. Tale punto è unico dato che la condizione $\frac{d}{dx}(F(x) - x) = e^{-(x-1)^2} - 1 < 0$ per ogni $x \neq 1$ implica che la funzione $x \mapsto F(x) - x$ è strettamente decrescente. Dal fatto che $F(0) < 0$ deduciamo che $c < 0$.

Per lo studio della successione definita per ricorrenza è utile osservare che $F(x) \leq x$ per ogni $x \geq c$, inoltre $F : (c, +\infty) \to (c, +\infty)$. Pertanto dato che $x_0 \in (c, +\infty)$ è immediato verificare per induzione che $x_n \in (c, +\infty)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e di conseguenza x_n è strettamente decrescente. Dato che F è continua il limite della successione è il punto fisso di F: $\lim x_n = c$.

Esercizio 4 Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2 + k^3)2^{3k-1}}{3^{k+2}} x^k$$

Possiamo calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze utilizzando il criterio del rapporto.

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \frac{(2 + (k+1)^3)2^{3k+2}}{3^{k+3}} \frac{3^{k+2}}{(2 + k^3)2^{3k-1}} \to 8/3$$

Pertanto $R = 3/8$, e la serie converge per $|x| < 3/8$, non converge per $|x| > 3/8$.

Per $|x| = 3/8$ la serie non è convergente in quanto l'addendo non è infinitesimo.