Soluzioni [1]

1.

La successione è ben definita (nessuna restrizione) e positiva (verifica immediata per induzione)

Studio della monotonia: $x_{n+1} \le x_n \iff \frac{1}{2} x_n e^{x_n} \le x_n \iff x_n \le \log 2$.

La successione rimane sempre minore di log 2.

Per n = 1 è vera.

$$x_n < \log 2 \Rightarrow \frac{x_n e^{x_n}}{2} < \log 2$$

Infatti per ipotesi di induzione $x_n < \log 2$ e dunque $\exp(x_n) < 2$.

La successione è dunque decrescente e limitata; di conseguenza tende ad un punto fisso, che in questo caso è 0.

2.

$\mathrm{tg}\, 3x = 3x + 9x^3 + o(x^4)$ $\qquad$ $\mathrm{sen}\, 3x = 3x - 9x^3/2 + o(x^4)$

$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$ $\qquad$ $\cos 2x = 1 - 2x^2 + 2x^4/3 + o(x^4)$

$$f(x) = \frac{(\mathrm{tg}\, 3x - \mathrm{sen}\, 3x)(\mathrm{tg}\, 3x + \mathrm{sen}\, 3x)}{e^{-2x^2} - \cos 2x} = \frac{81x^4 + o(x^4)}{4x^4/3 + o(x^4)} \to \frac{243}{4}.$$

3.

Integrando per parti, si ottiene :

$$-\frac{1}{x}\log(x^2 - 2x + 2) + \int \frac{2x-2}{x(x^2-2x+2)}\, dx.$$

Per calcolare il secondo integrale, scomponiamo ola funzione razionale secondo il metodo di Hermite (qui riportiamo direttamente il risultato della scomposizione):

$$\int \frac{2x-2}{x(x^2-2x+2)}\, dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x}{x^2-2x+2}\, dx.$$

Il primo integrale fornisce – log | x | + c. Rimane da calcolare il secondo integrale.

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\, dx + \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + \mathrm{arctg}(x-1) + c.$$

Soluzioni [2]

1.

La successione è ben definita (nessuna restrizione) e positiva (verifica immediata per induzione)

Studio della monotonia: $x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} x_n e^{x_n} \leq x_n \Leftrightarrow x_n \leq \log 2$.

La successione rimane sempre minore di log 2.

Per n = 1 è vera.

$$x_n < \log 2 \Rightarrow \frac{x_n e^{x_n}}{2} < \log 2$$

Infatti per ipotesi di induzione $x_n < \log 2$ e dunque $\exp(x_n) < 2$.

La successione è dunque decrescente e limitata; di conseguenza tende ad un punto fisso, che in questo caso è 0.

2.

$$\text{tg}(x/2) = x/2 + x^3/24 + o(x^4) \qquad \text{sen}(x/2) = x/2 - x^3/48 + o(x^4)$$

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) \qquad \log(1-2x^2) = -2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{(\text{tg}\, x/2 - \text{sen}\, x/2)(\text{tg}\, x/2 + \text{sen}\, x/2)}{e^{-2x^2} - \cos 2x} = \frac{x^4/16 + o(x^4)}{4x^4 + o(x^4)} \to \frac{1}{64}.$$

3.

Integrando per parti, si ottiene :

$$-\frac{1}{x}\log(x^2 - 4x + 5) + \int \frac{2x-4}{x(x^2-4x+5)}\, dx .$$

Per calcolare il secondo integrale, scomponiamo ola funzione razionale secondo il metodo di Hermite (qui riportiamo direttamente il risultato della scomposizione):

$$\int \frac{2x-4}{x(x^2-4x+5)}\, dx = -\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{5}\int \frac{2x-3}{x^2-4x+5}\, dx .$$

Il primo integrale fornisce $-\frac{4}{5}\log|x| + c$. Rimane da calcolare il secondo integrale.

$$\frac{2}{5}\int \frac{2x-3}{x^2-4x+5}\, dx = \frac{2}{5}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\, dx + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2-4x+5) + \text{arctg}(x-2) + c.$$