Esercitazione 2

1. Data la fz. $f(t) = \frac{\lg t}{\sqrt[3]{t(t-1)}}$ provare che è integrabile in un intorno di $t=0$ e di $t=1$, mentre non è integrabile in nessun intorno di $+\infty$.
Ciò stabilito, studiare la fz. $F(x) = \int_1^x \frac{\lg t}{\sqrt[3]{t(t-1)}}\, dt$.

2. Calcolare

$$\int \frac{tg^2 x}{1 - tg\, x}\, dx \qquad \int \frac{dx}{x + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 3x - 1}}$$

3. Studiare l'esistenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{|\lg x|}} \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x)}\, dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$$

4. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \lg n}{\sqrt{1+n^3}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lg \frac{n^2 + e^{-n}}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \lg n}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lg n}{n^2+1} x^n .$$