Soluzioni

1. $f(t) = \sqrt{\dfrac{t(t-1)}{\lg t}}$ C. E. $t > 0,\ t \neq 1$

INTEGRABILITÀ $\underset{0}{\text{SÌ}}$ ——— $\underset{1}{\text{SÌ}}$ ——— $\underset{+\infty}{\text{NO}}$

Infatti:

- per $t \to 0$ $f(t) \to 0$ disc. eliminabile
- per $t \to 1$ $f(t) \sim \sqrt{\dfrac{t-1}{t-1}} \to 1$ disc. eliminabile
- per $t \to +\infty$ $f(t) \to +\infty$

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{t(t-1)}{\lg t}}\, dt$$

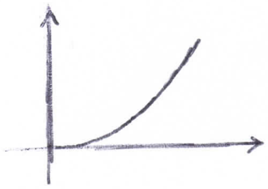
C.E. $x \geq 0$

SGN $F(x) > 0$, nulla per $x = 0$

LIM per $x \to +\infty$ $F(x) \to +\infty$

DRV $F'(x) = \dfrac{x(x-1)}{\lg x} > 0$

$F'(0) = 0$ $F'(1) = 1$



G_F

2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{3 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

Poiché la fz. è pari nella coppia $(\operatorname{sen} x, \cos x)$, si può scrivere nella forma $\varphi(\operatorname{tg} x)$ oppure $\dfrac{\psi(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$.
Infatti:

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{3(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + \operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{4 \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x\,(4\operatorname{tg}^2 x + 3)}\, dx$$

ponendo $\operatorname{tg} x = t$, $\dfrac{1}{\cos^2 x} dx = dt$:

$$\int \frac{t}{4t^2 + 3}\, dt$$

ponendo $4t^2 + 3 = z$, $8t\, dt = dz$:

$$\frac{1}{8} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{8} \lg |z| + c = \frac{1}{8} \lg(4 \operatorname{tg}^2 x + 3) + c.$$

3. Criterio rapporto: $\dfrac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n+1)^3 + 1} \cdot \dfrac{n^3 + 1}{n^2 + n + 1} |x| \sim$

$$\sim \frac{n^5}{n^5} |x| \to |x|$$

La serie converge per $-1 < x < 1$; diverge per $x > 1$ (serie a segno costante); non converge per $x < -1$ (serie a segno alterno).

Per $x = 1$ $\dfrac{n^2 + n + 1}{n^3 + 1} \sim \dfrac{1}{n}$ serie armonica che diverge.

Per $x = -1$ $(-1)^n \dfrac{n^2 + n + 1}{n^3 + 1}$ serie a segno alterno: converge per Leibniz

4.

L'integrale è improprio perchè esteso ad una semiretta.

Per $x \to +\infty$ $\frac{1}{x(x+1)} \sim \frac{1}{x^2}$ che è integrabile; possiamo dire che lo è anche la fz. data; per $x \to +\infty$ si ha:

$$\frac{\lg x}{x(x+1)} \sim \frac{\lg x}{x^2} < \frac{x^\alpha}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^{2-\alpha}$$

Scegliamo $\alpha > 0$ tale che $2-\alpha > 1$, cioè $0 < \alpha < 1$.

Per uno qualunque di questi valori la maggiorazione trovata permette di concludere con l'integrabilità.