Soluzioni

Problema 1

a) Fila A

Usiamo la Disuguaglianza di Bernoulli

$(1+x)^n \geq nx+1$ per $\forall n \in \mathbb{N}$, per $\forall x \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$

Allora: $7^n = (1+6)^n \geq 6n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty}(6n+1) = \lim_{n\to+\infty} n\left(6+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right) = +\infty \Rightarrow$ secondo Teorema del confronto $\lim_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$

Fila B (come fila A) $5^n = (1+4)^n \geq 4n+1 \ \forall n$, $\lim_{n\to+\infty}(4n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$

Fila C (come fila A) $3^n = (1+2)^n \geq 2n+1 \ \forall n$, $\lim_{n\to+\infty}(2n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

Fila D (come fila A) $4^n = (1+3)^n \geq 3n+1 \ \forall n$, $\lim_{n\to+\infty}(3n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$

b) Fila A Occore stimare la quantità

$$\left|\frac{4-x^2}{x^2}\right| = \left|\frac{(2-x)(2+x)}{x^2}\right| = \frac{|2-x|\cdot|2+x|}{|x^2|} = \frac{|x-2|\cdot|x+2|}{x^2}$$

$x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x^2| = x^2$

Invece di risolvere la disequazione

$\frac{|x-2|\cdot|x+2|}{x^2} < \varepsilon$, si può osservare che, per ogni x appartenente all'intorno di $x_0 = 2$ di ampiezza $\frac{1}{2}$, risulta:

$$|x-2|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2-\frac{1}{2}<x<2+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<x<\frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{9}{4}<x^2<\frac{25}{4} \Rightarrow \frac{1}{\frac{4}{25}}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{x^2}<\frac{4}{9}};$$

$$\frac{3}{2}+2<x+2<\frac{5}{2}+2 \Leftrightarrow \frac{7}{2}<x+2<\frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{|x+2|<\frac{9}{2}};$$

perciò

$$\left|\frac{4-x^2}{x^2}\right| = \frac{|x-2|\cdot|x+2|}{x^2} < |x-2|\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{9} = 2|x-2| \text{ per } \forall x\in\mathbb{R}$$

tale che $|x-2|<\frac{1}{2}$. Fissato $\varepsilon>0$ e posto $\delta=\min\left[\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right]$, risulta

$$\left|\frac{4-x^2}{x^2}\right| < 2\cdot|x-2| \leq \cancel{2}\cdot\frac{\varepsilon}{\cancel{2}} = \varepsilon \quad , \forall x\in\mathbb{R} \text{ tale che } |x-2|<\delta$$

Fila B (come fila A)

$$\left|\frac{9-x^2}{x}\right| = \left|\frac{(3-x)(3+x)}{x}\right| = \frac{|3-x|\cdot|3+x|}{|x|} = \frac{|x-3|\cdot|x+3|}{|x|}$$

$\frac{|x-3|\cdot|x+3|}{|x|}<\varepsilon$, $\forall x$ e all'intorno di $x_0=3$ di ampiezza $\frac{1}{2}$,

risulta: $|x-3|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x-3<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3-\frac{1}{2}<x<3+\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{7}{2}}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{7}<\frac{1}{x}<\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{|x|}<\frac{2}{5}}; \quad \frac{5}{2}+3<x+3<\frac{7}{2}+3 \Leftrightarrow \frac{11}{2}<x+3<\frac{13}{2} \Rightarrow$$

$\boxed{|x+3|<\frac{13}{2}}$; perciò

$$\left|\frac{9-x^2}{x}\right| = \frac{|x-3|\cdot|x+3|}{|x|} < |x-3|\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{13}{5}|x-3| \text{ per } \forall x\in\mathbb{R}$$

tale che $|x-3|<\frac{1}{2}$

Fissato ε, $\delta = \min\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{13}\varepsilon\right]$, risulta

$$\left|\frac{9-x^2}{x}\right| < \frac{13}{5}|x-3| \leq \frac{13}{5}\cdot\frac{5}{13}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{per } \forall x \in R \text{ tale}$$

che $|x-3| < \delta$

Fila C (come fila A)

$$\left|\frac{16-x^2}{x^2}\right| = \left|\frac{(4-x)(4+x)}{x^2}\right| = \frac{|4-x|\cdot|4+x|}{|x^2|} = \frac{|x-4|\cdot|x+4|}{x^2}$$

$x^2 \geq 0 \ \forall x \in R \Rightarrow |x^2| = x^2$

$\nexists$ $\frac{|x-4|\cdot|x+4|}{x^2} < \varepsilon$, $\forall x \in$ all'intorno di $x_0 = 4$ di ampiezza $\frac{1}{2}$,

risulta: $|x-4| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-4 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-\frac{1}{2} < x < 4+\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{7}{2} < x < \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{49}{4} < x^2 < \frac{81}{4} \Rightarrow \frac{1}{\frac{81}{4}} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\frac{49}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{81} < \frac{1}{x^2} < \frac{4}{49} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x^2} < \frac{4}{49}}; \quad \frac{7}{2}+4 < x+4 < \frac{9}{2}+4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{2} < x+4 < \frac{17}{2} \Rightarrow \boxed{|x+4| < \frac{17}{2}}; \text{ perciò}$$

$$\left|\frac{16-x^2}{x^2}\right| = \frac{|x-4|\cdot|x+4|}{x^2} < |x-4|\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{4}{49} = \frac{34}{49}|x-4| \quad \forall x \in R$$

tale che $|x-4| < \frac{1}{2}$. Fissato ε, $\delta = \min\left[\frac{1}{2}; \frac{49}{34}\varepsilon\right]$,

risulta:

$$\left|\frac{16-x^2}{x^2}\right| < \frac{34}{49}\cdot|x-4| \leq \frac{34}{49}\cdot\frac{49}{34}\varepsilon = \varepsilon, \quad \forall x \in R \text{ tale che } |x-4| < \delta$$

Fila D (come fila A)

$$\left|\frac{25-x^2}{x}\right| = \left|\frac{(5-x)(5+x)}{x}\right| = \frac{|5-x|\cdot|5+x|}{|x|} = \frac{|x-5|\cdot|x+5|}{|x|}$$