Soluzioni

1.1 Si usa la disuguaglianza di Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ $(n \in \mathbb{N},\ x \geq -1)$

$7^n = (1+6)^n \geq 1+6n \to +\infty$

Analogamente negli altri casi.

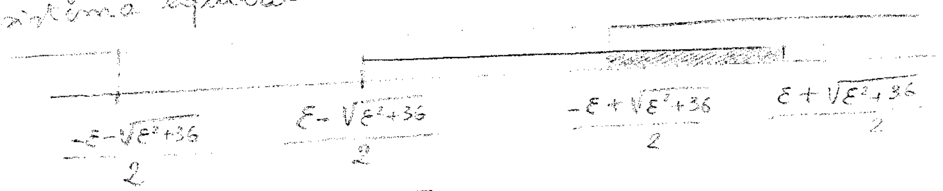
1.2 (a) Dobbiamo provare che le soluzioni del sistema $-\varepsilon < \frac{4-x^2}{x^2} < \varepsilon$ contengono un intorno di $x_0 = 2$.

Il sistema equivale a $(1-\varepsilon)x^2 < 4$, $(1+\varepsilon)x^2 > 4$, ovvero (supponendo $\varepsilon < 1$, come è lecito fare) $4/(1+\varepsilon) < x^2 < 4/(1-\varepsilon)$. Considerando le sole soluzioni positive, $2/\sqrt{1+\varepsilon} < x < 2/\sqrt{1-\varepsilon}$ che è appunto un intorno di 2, perchè $2/\sqrt{1+\varepsilon} < 2$ e $2/\sqrt{1-\varepsilon} > 2$.

In modo del tutto analogo si verifica (c).

(b) Dobbiamo provare che le soluzioni del sistema $-\varepsilon < \frac{9-x^2}{x} < \varepsilon$ contengono un intorno di $x_0 = 3$.

Il sistema equivale a $x^2 - \varepsilon x - 9 < 0$, $x^2 + \varepsilon x - 9 > 0$, da cui



$$\frac{-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+36}}{2} < x < \frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+36}}{2}$$

È un intorno di $x_0 = 3$, perchè

$\frac{-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+36}}{2} < 3 \iff \sqrt{\varepsilon^2+36} < 6+\varepsilon \iff \varepsilon^2+36 < \varepsilon^2+36+12\varepsilon$ che è vera

$\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+36}}{2} > 3 \iff \sqrt{\varepsilon^2+36} > 6-\varepsilon \underset{(\varepsilon<6)}{\iff} \varepsilon^2+36 > \varepsilon^2+36-12\varepsilon$ che è vera.

In modo del tutto analogo si verifica (d).

2.1 (a) Indicato con a_n il termine sotto radice, si ha $a_n \sim 2 \cdot 3^n$.

$\sqrt[n]{a_n} \sim 3\sqrt[n]{2} \to 3$

(b) $a_n \sim 3 \cdot 4^n$, $\sqrt[n]{a_n} \sim 4\sqrt[n]{3} \to 4$ (c) $a_n \sim 2 \cdot 5^n$, $\sqrt[n]{a_n} \sim 5 \cdot \sqrt[n]{2} \to 5$

(d) $a_n \sim 5 \cdot 6^n$, $\sqrt[n]{a_n} \sim 6\sqrt[n]{5} \to 6$

2.2 (a) $\lg a_n = \sqrt{n^6+3n^3+11}\,\lg\left(1+\frac{5}{n^3}\right) \sim n^3 \cdot \frac{5}{n^3} \to 5$; $a_n \to e^5$

(b) $\lg a_n \sim n \cdot \frac{7}{n} \to 7$; $a_n \to e^7$ (c) $\lg a_n \sim n^2\frac{4}{n^2} \to 4$; $a_n \to e^4$

(d) $\lg a_n \sim n \cdot \frac{3}{n} \to 3$; $a_n \to e^3$.

3. (a) $\lg f(x) = \frac{\lg(1+\operatorname{sen}^2 2x)}{(e^{5x}-1)\operatorname{arctg} 3x} \sim \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{5x \cdot 3x} \sim \frac{4x^2}{15x^2} \to \frac{4}{15}$; $f(0) = e^{4/15}$

(b) $\lg f(x) \sim \frac{9x^2}{10x^2} \to \frac{9}{10}$; $f(0) = e^{9/10}$ (c) $\lg f(x) \sim \frac{16x^2}{6x^2} \to \frac{8}{3}$; $f(0) = e^{8/3}$

(d) $\lg f(x) \sim \frac{25x^2}{8x^2} \to \frac{25}{8}$; $f(0) = e^{25/8}$

4.1 (a) $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$, $(1-i)^8 = 16\, e^{i0} = 16$

$x^2+y^2+4x-4iy = 12-4i$

$\begin{cases} x^2+y^2+4x = 12 \\ y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1 \\ x^2+4x-11=0 \end{cases}$ $z = (-2 \pm \sqrt{15}) + i$

(b) $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $(1+i)^6 = 8\, e^{\frac{3}{2}\pi i} = -8i$

$x^2+y^2+2x-2iy = -8i+24$

$\begin{cases} x^2+y^2+2x = 24 \\ y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=4 \\ x^2+2x-8=0 \end{cases}$ $z = 2+4i$, $z=-4+4i$

(c) $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$, $(1-i)^6 = 8\, e^{i\pi/2} = 8i$

$x^2+y^2+2x-2iy = 24+8i$

$\begin{cases} x^2+y^2+2x = 24 \\ y=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-4 \\ x^2+2x-8=0 \end{cases}$ $z = 3-4i$, $z = -4-4i$

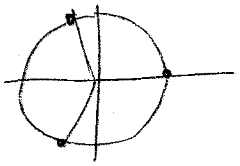
(d) $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $(1+i)^8 = 16\, e^{i0} = 16$

$x^2+y^2+4x-4iy = 12-4i$

$\begin{cases} x^2+y^2+4x = 12 \\ y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1 \\ x^2+4x-11=0 \end{cases}$ $z = -2\pm\sqrt{15} + i$

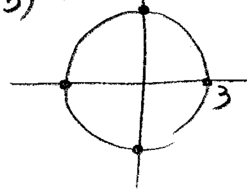
4.2

(a) Una soluzione è $z=2$. Le soluzioni descrivono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 2



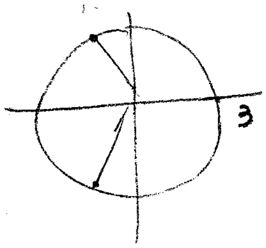
2, $2\left(-\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b)



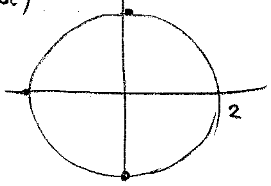
± 3
$\pm 3i$

(c)



3
$3\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

(d)



± 2
$\pm 2i$