Soluzioni

1. $S_n = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) = x_{n+1} - x_1$

Dunque la serie converge $\Leftrightarrow$ x_n converge.
Indicato con L il limite di x_n, $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = L - x_1$.

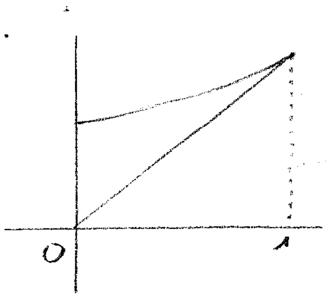
$\frac{2n+1}{(n+1)^2 n^2} = -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}$; poiché $x_n = -\frac{1}{n^2} \to 0$, la serie converge ed ha per somma $-x_1 = 1$.

2. Per $x \to +\infty$ $\frac{1}{e^{2x}+1} \sim \frac{1}{e^{2x}} < \frac{1}{x^\alpha}$ $\forall \alpha > 0$. Scelto $\alpha > 1$, si ottiene l'esistenza dell'integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}+1} \underset{\substack{e^x = t \\ x = \lg t \\ dx = dt/t}}{=} \int_1^\infty \frac{dt}{t(t^2+1)} \underset{\substack{t^2 = z \\ 2t\,dt = dz}}{=} \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dz}{z(z+1)} = \frac{1}{2} \int_1^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\lg \frac{z}{z+1} \right]_1^\infty = -\frac{1}{2} \lg \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lg 2.$$

3.



La retta $y = ex$ è tangente al grafico dell'esponenziale.
Tenendo conto della convessità, l'eq. $e^x = mx$ ha una ed una sola soluzione in $[0,1]$ $\forall m \geq e$.

Alternativamente si può studiare $F(x) = \frac{e^x}{x}$ in $(0,1]$ (dopo aver osservato che $x=0$ non è soluzione dell'eq. per nessun valore di m).

$F'(x) = e^x (x-1)/x^2 < 0 \Rightarrow \operatorname{Im} F = [e, +\infty)$.

4. Studiamo la fz. in $[0, 2\pi]$.

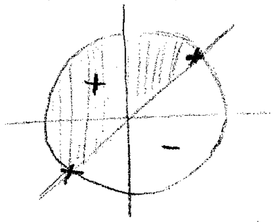
CE $\quad \operatorname{sen} x \neq \cos x \quad \leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{4}, \; x \neq \frac{5}{4}\pi$

SGN $\quad$ positiva se $\operatorname{sen} x > \cos x$

LIM $\quad f(0) = f(2\pi) = -1$

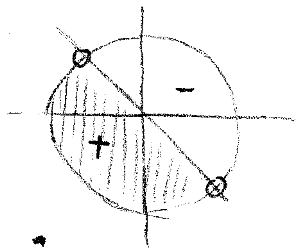
$x \to \frac{\pi}{4}^\pm \quad f(x) \to \pm\infty$

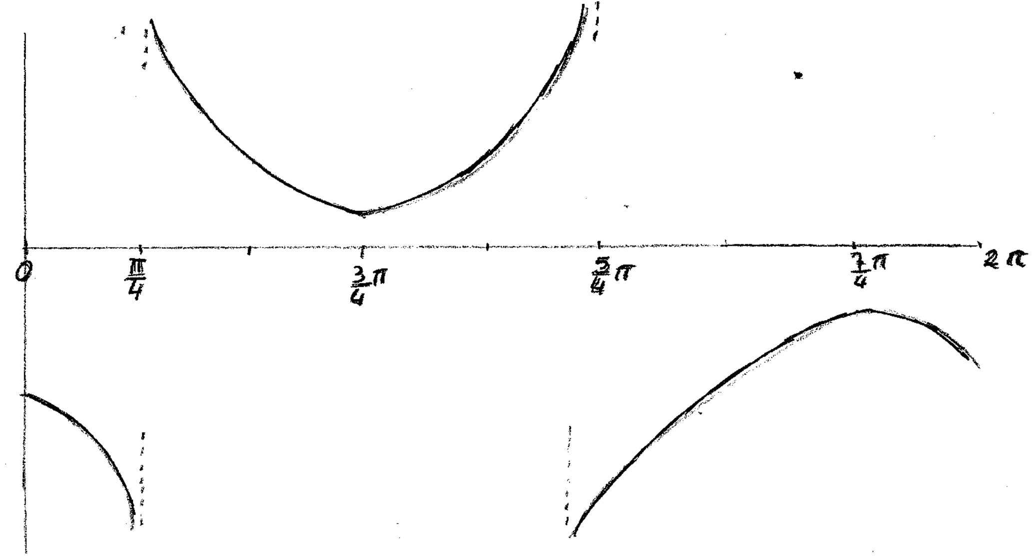
$x \to \frac{5}{4}^\pm \quad f(x) \to \mp\infty$



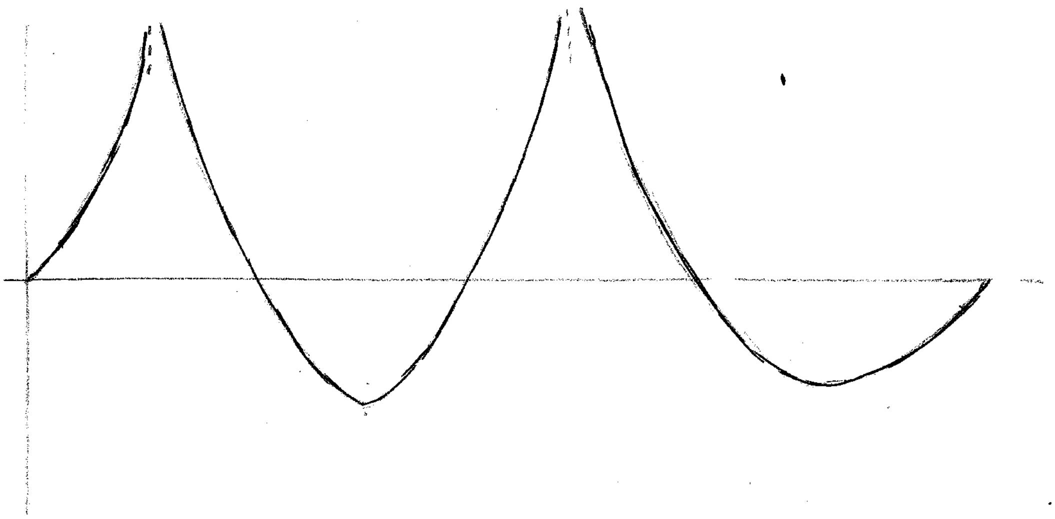
DRV $\quad f'(x) = -\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$

DRV^2 $\quad f''(x) = \frac{3 + \operatorname{sen} 2x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^3} > 0$





G_f



$G_{\lg|f(x)|}$

$x_0 = \pi/4$

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \pi/4)}$

infinito di ordine 1