Soluzioni

1. C.E. $x \in (-1,1)$, $y \in [-1,0) \cup (0,1]$

Tenendo conto della C.I., dovrà essere $y \in (0,1]$.

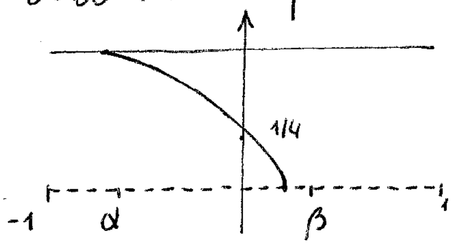
$y=1$ soluzione costante dell'equazione

$$\int -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \iff \sqrt{1-y^2} = \arcsin x + c$$

La C.I. è verificata per $c = \sqrt{15}/4$.

$$\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + \frac{\sqrt{15}}{4} \underset{(*)}{\iff} 1-y^2 = \left(\arcsin x + \frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 \underset{(**)}{\iff} y = \sqrt{1-\left(\arcsin x + \frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}$$

Dobbiamo imporre $0 < \arcsin x + \frac{\sqrt{15}}{4} < 1$, e dunque $x \in \left(-\operatorname{sen}\frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{sen}\left(1-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right)$.



La soluzione può essere prolungata saldandola con quella costante in $(-1, -\operatorname{sen}\frac{\sqrt{15}}{4}]$.

2.

C.E. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

SGN sempre positiva; nulla per $x = 3/2$.

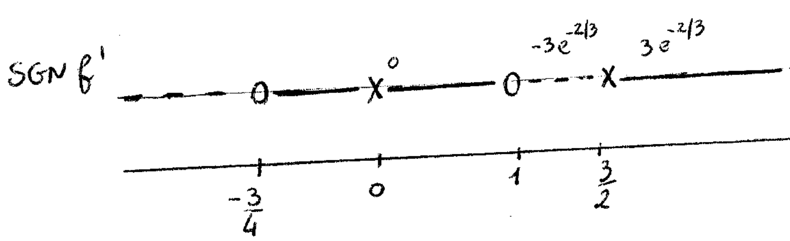
LIM per $x \to 0^+$ $f(x) \to 0$ D.E. da destra;

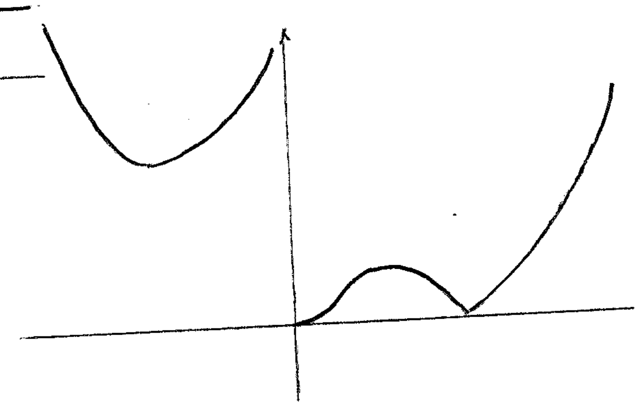
per $x \to 0^-$ $f(x) \sim -3x e^{-1/x} \underset{-1/x = t \to +\infty}{=} 3\frac{e^t}{t} \to +\infty$ AS. VERT. da sinistra (*)

DRV $f'(x) = e^{-1/x}\,\dfrac{4x^2-x-3}{x}\,\operatorname{sgn}(2x^2-3x)$ $x \neq 0$, $x \neq 3/2$

$x = 3/2$ punto angoloso

per $x \to 0^+$ $f'(x) \sim \dfrac{3e^{-1/x}}{x} \to 0$ semiretta tangente orizzontale





(*) per $x \to \pm\infty$ $f(x) \sim 2x^2 \to +\infty$ senza asintoto

3. $$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}-x} \underset{x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t-\operatorname{sen} t+1}\,dt \underset{\operatorname{tg}\frac{t}{2}=z}{=} \int_{-1}^{1} \frac{1+z}{1+z^2}\,dz =$$

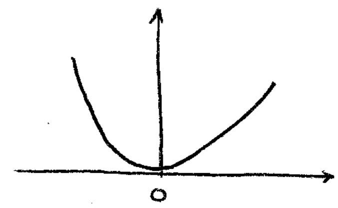
$$= \left[\operatorname{arctg} z + \frac{1}{2}\lg(1+z^2)\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

4. La successione è ben definita.

$x_{n+1} \geqslant x_n \iff e^{x_n}-1 \geqslant x_n \iff e^{x_n}-1-x_n \geqslant 0$

Consideriamo la funzione $\varphi(x) = e^x - 1 - x$.

Per $x \to \pm\infty$ $\varphi(x) \to +\infty$; $\varphi(0)=0$; $\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$ per $x>0$



La successione risulta crescente.

Se $x_1 = -2$, $\min x_n = \inf x_n = -2$, $\max x_n$ non $\exists$, $\sup x_n = \lim = 0$

(il limite è il punto fisso).

Se $x_1 = 1$, $\min x_n = \inf x_n = 1$, $\max x_n$ non $\exists$, $\sup x_n = \lim = +\infty$.