Soluzioni

1. $\sqrt[3]{1+3x} - x - \cos x = (1+x-x^2) - x - (1-\frac{1}{2}x^2) + o(x^2) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$e^x - e^{-x} - 2\lg(1+x) = (1+x+\frac{1}{2}x^2) - (1-x+\frac{1}{2}x^2) - 2(x-\frac{1}{2}x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$

$f(x) \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \to -\frac{1}{2}$.

2. $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x^2-5x-6|} & \text{se } x>0 \\ \sqrt{|x^2+5x+6|} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

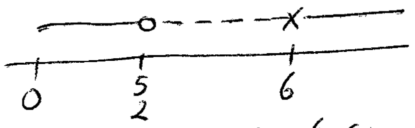
$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \sqrt{6}$ (discont. eliminabile)

Per $x>0$

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim x \to +\infty$

$f(x) - x = \frac{-5x-6}{\sqrt{x^2-5x-6}+x} \sim \frac{-5x}{2x} \to -\frac{5}{2}$ $\qquad y = x - \frac{5}{2}$ asintoto

$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x^2-5x-6)}{2\sqrt{|x^2-5x-6|}}(2x-5)$



$x=6$ cuspide

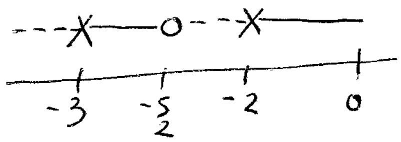
$f''(x) = -\frac{49}{4|x^2-5x-6|^{3/2}} < 0$

Per $x<0$

per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \sim -x \to +\infty$

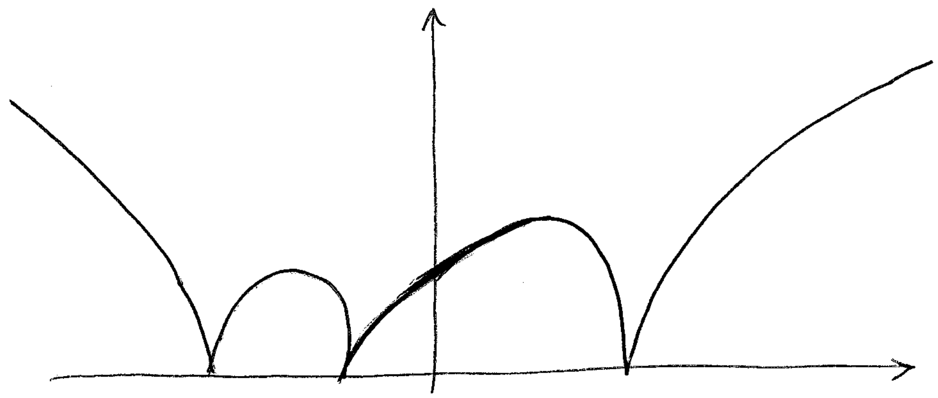
$f(x) + x = \frac{5x+6}{\sqrt{x^2+5x+6}-x} \sim \frac{5x}{-2x} \to -\frac{5}{2}$ $\qquad y = -x - \frac{5}{2}$ asintoto

$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x^2+5x+6)}{2\sqrt{|x^2+5x+6|}}(2x+5)$



$x=-2$, $x=-3$ cuspidi

$f''(x) = -\frac{1}{4|x^2+5x+6|^{3/2}} < 0$



3. Poiché la funzione è pari nella coppia $(\operatorname{sen} x, \cos x)$, si pone

$$\operatorname{tg} x = t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$y = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2-4t^4} = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1+3t^2)} = \int\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{1-t} + \frac{1}{8}\,\frac{1}{1+t} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1+3t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\lg\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,t + c = \dots$$

4. $y=0$ è soluzione costante dell'eq. a variabili separate. Le altre soluzioni non intersecano la soluzione costante (perché la fz. $1/y(1+y^2)$ non è integrabile nell'intorno di 0). Tenendo conto della C.I., possiamo limitarci a considerare il caso $y>0$ (oltre che $x>0$ come richiesto dal problema).

$$\int \frac{dy}{y(1+y^2)} = \int \frac{dx}{x} \iff \int\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right)dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\lg \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = \lg x + c$$

La C.I. è soddisfatta se $c = \lg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\lg \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = \lg \frac{x}{\sqrt{2}} \iff \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \iff$$

$$y^2 = \frac{x^2}{2-x^2} \iff y = \sqrt{\frac{x^2}{2-x^2}}, \qquad x \in (0,\sqrt{2})$$