Analisi Matematica

Prova parziale n. 1 del 2.11.09

Soluzioni

[1]

1. $\begin{cases} \sqrt{|x-1|} + 2x > 0 \\ \sqrt{|x-1|} + 2x > 1 \end{cases} \iff \sqrt{|x-1|} > 1-2x \iff 1-2x<0 \;\vee\; \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 1-x > (1-2x)^2 \end{cases}$

$\iff x > \frac{1}{2} \;\vee\; \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 3x < 0 \end{cases} \iff x > \frac{1}{2} \vee 0 < x \leq \frac{1}{2}$

$\iff x > 0.$

2. La successione è ben definita e positiva.
$x_{n+1} > x_n \iff x_n < 2$ ($L=2$ punto fisso)
$x_n > 2 \Rightarrow \sqrt{2-x_n+x_n^2} > 2$ (elevando al quadrato, si ottiene il risultato)
Poiché $x_1 > 2$, si deduce che la successione è decrescente e limitata inferiormente. Dunque ammette limite e questo limite è finito.
Dovendo coincidere con un punto fisso, si deduce che vale 2.

3. $x_n = \lg \frac{n-2+3}{n-2} = \lg\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$

La successione è decrescente, perché tale è $\frac{3}{n-2}$ (e dunque anche $1+\frac{3}{n-2}$) e perché la funzione lg conserva la monotonia.
Dunque max = sup = $x_3 = \lg 4$, min non esiste.
Verifica che inf $=0$:

(a) $\forall n,\ \lg\left(1+\frac{3}{n-2}\right) \geq 0$. ovvia, perché $1+\frac{3}{n-2} > 1$.

(b) $\forall \varepsilon>0,\ \exists \bar{n} : \lg\left(1+\frac{3}{\bar{n}-2}\right) < \varepsilon$.

$\lg\left(1+\frac{3}{n-2}\right) < \varepsilon \iff 1+\frac{3}{n-2} < e^{\varepsilon} \iff \frac{3}{n-2} < e^{\varepsilon}-1 \iff$

$\iff n-2 > \frac{3}{e^{\varepsilon}-1} \iff n > \frac{2e^{\varepsilon}+1}{e^{\varepsilon}-1}$.

Dunque la disequazione è verificata definitivamente (a riprova che 0 non è solo l'inf., ma anche il limite).

1. $\begin{cases}\sqrt{|x-1|}-2x>0\\ \sqrt{|x-1|}-2x>1\end{cases} \iff \sqrt{|x-1|}>2x+1 \iff 2x+1<0 \ \vee \ \begin{cases}2x+1\geq 0\\ |x-1|>(2x+1)^2\end{cases}$

$$\iff x<-\tfrac{1}{2} \ \vee \ \begin{cases}-\tfrac{1}{2}\leq x<1\\ 1-x>(2x+1)^2\end{cases} \ \vee \ \begin{cases}x\geq 1\\ x-1>(2x+1)^2\end{cases}$$

$$\iff x<-\tfrac{1}{2} \ \vee \ \begin{cases}-\tfrac{1}{2}\leq x<1\\ 4x^2+5x<0\end{cases} \ \vee \ \begin{cases}x\geq 1\\ 4x^2+3x+2<0\end{cases}$$

$\iff x<-\frac{1}{2} \ \vee \ -\frac{1}{2}\leq x<0 \ \vee$ nessuna soluzione

2. La successione è ben definita e positiva.
$x_{n+1}>x_n \iff x\leq 2$ $(L=2)$ punto fisso
$x_n<2 \Rightarrow x_{n+1}=\dfrac{2+x_n^2}{1+x_n}<2$ (infatti questa equivale a $x_n^2-2x_n<0$).
Poichè $x_1<2$, si deduce che la successione è decrescente e limitata inferiormente. Dunque, ammette limite e questo è finito.
Dovendo coincidere con un punto fisso, si deduce che vale 2.

3. $x_n = e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$
La successione è decrescente, perchè tali sono $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n^2}$ (e quindi anche la loro somma) e perchè la funzione exp conserva la monotonia.
Dunque, max x_1 = sup $x_1 = e^2$, min non esiste.
Per provare che inf $x_n=1$, dobbiamo verificare:
(a) $\forall n, \ e^{\frac{n+1}{n^2}}>1$. ovvio perchè $\frac{n+1}{n^2}>0$.

(b) $\forall \varepsilon>0, \ \exists \bar{n}: \ e^{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}^2}}<1+\varepsilon$.

$$e^{\frac{n+1}{n^2}}<1+\varepsilon \iff \frac{n+1}{n^2}<\lg(1+\varepsilon) \iff An^2-n-1>0$$
dove $A=\lg(1+\varepsilon)>0$

$$\iff n>\frac{1+\sqrt{1+4A}}{2A} \quad \left(\vee \quad n<\frac{1-\sqrt{1+4A}}{2A}\right)$$
non accettabili

Dunque, la disequazione è verificata definitivamente (a riprova che 1 non è solo l'inf. ma anche il limite).

[3]

1. $\begin{cases} \sqrt{|x-2|} + 2x > 0 \\ \sqrt{|x-2|} + 2x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{|x-2|} > -2x \\ \sqrt{|x-2|} < 1-2x \end{cases}$

$\sqrt{|x-2|} > -2x \iff -2x < 0 \ \vee \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 2-x > 4x^2 \end{cases} \iff x > 0 \ \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ \frac{-1-\sqrt{33}}{8} < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \end{cases}$

$\iff x > \frac{-1-\sqrt{33}}{8}$

$\sqrt{|x-2|} < 1-2x \iff \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 2-x < (1-2x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 1/2 \\ x < -\frac{1}{4} \ \vee \ x > 1 \end{cases} \iff x < -\frac{1}{4}$

La disequazione è verificata per $\frac{-1-\sqrt{33}}{8} < x < -\frac{1}{4}$.

2. La successione è ben definita e positiva.
$x_{n+1} > x_n \iff x_n < 4$ ($L = 4$ punto fisso).
$x_n < 4 \Rightarrow \sqrt{4 - x_n + x_n^2} < 4$ (elevando al quadrato, si ottiene il risultato).
Poiché $x_1 < 4$, si deduce che la successione è decrescente e limitata inf.
Dunque ammette limite e questo limite è finito.
Dovendo coincidere con un punto fisso, si deduce che vale 4.

3. $x_n = \lg \frac{n+1-3}{n+1} = \lg\left(1 - \frac{3}{n+1}\right)$.
La successione è crescente, perché tale è $-\frac{3}{n+1}$ (e dunque anche $1 - \frac{3}{n+1}$) e perché la funzione lg conserva la monotonia.
Dunque, min = inf = $x_3 = \lg \frac{1}{4}$, max non esiste.
Verifica che sup = 0.
(a) $\forall n$, $\lg\left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \leq 0$. Ovvio perché $1 - \frac{3}{n+1} < 1$.
(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \lg\left(1 - \frac{3}{n+1}\right) > -\varepsilon$.

$\lg\left(1 - \frac{3}{n+1}\right) > -\varepsilon \iff 1 - \frac{3}{n+1} > e^{-\varepsilon} \iff \frac{3}{n+1} < 1 - e^{-\varepsilon}$

$\iff \frac{n+1}{3} > \frac{1}{1-e^{-\varepsilon}} \iff n > \frac{2+e^{-\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}}$.

Dunque la disequazione è verificata definitivamente (a riprova che 0 non è solo il sup, ma anche il limite).

1. $\begin{cases} \sqrt{|x-2|} - 2x > 0 \\ \sqrt{|x-2|} - 2x < 1 \end{cases}$

$$\sqrt{|x-2|} > 2x \iff x<0 \;\vee\; \begin{cases} 0 \le x < 2 \\ 2-x > 4x^2 \end{cases} \;\vee\; \begin{cases} x \ge 2 \\ x-2 > 4x^2 \end{cases}$$

$$\iff x<0 \;\vee\; \begin{cases} 0 \le x < 2 \\ \frac{-1+\sqrt{33}}{8} < x < -\frac{1+\sqrt{33}}{8} \end{cases} \;\vee\; \begin{cases} x \ge 2 \\ \text{nessuna sol.} \end{cases}$$

$$\iff x < 2$$

$$\sqrt{|x-2|} < 1+2x \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x < 2 \\ 2-x < (1+2x)^2 \end{cases} \;\vee\; \begin{cases} x \ge 2 \\ x-2 < (1+2x)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x < 2 \\ x < \frac{-5-\sqrt{41}}{8} \;\vee\; x > \frac{-5+\sqrt{41}}{8} \end{cases} \;\vee\; \begin{cases} x \ge 2 \\ \text{sempre verificata} \end{cases}$$

$$\iff x > \frac{\sqrt{41}-5}{8}.$$

La disequazione è verificata per $\frac{\sqrt{41}-5}{8} < x < 2$.

2. La successione è ben definita e positiva.
$x_{n+1} > x_n \iff x_n < 1$ ($L=1$ punto fisso)
$x_n < 1 \iff \frac{2+x_n^2}{2+x_n} < 1$ (infatti la disequazione si riscrive come $x_n^2 - x_n < 0$).
Poichè $x_1 > 1$, la successione è decrescente e limitata inf.
Dunque ammette limite e questo è finito.
Dovendo coincidere con un punto fisso, è necessariamente uguale a 1.

3. $x_n = e^{-\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}}$
La successione è crescente (perchè tali sono $-\frac{1}{n}$ e $-\frac{4}{n^2}$, e dunque la loro somma) e perchè la funzione exp conserva la monotonia.
Dunque, $\min = \inf = e^{-5}$, max non esiste.
Verifichiamo che $\sup = 1$.

(a) $e^{-\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}} \le 1$. Ovvio, perchè $-\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} < 0$.

(b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} : e^{-\frac{1}{\bar{n}} - \frac{4}{\bar{n}^2}} > 1-\varepsilon$.

Possiamo scegliere $0 < \varepsilon < 1$.
La disep. diventa: $\frac{-n-4}{n^2} > \lg(1-\varepsilon)$.
Ponendo $\lg(1-\varepsilon) = -A$ (con $A > 0$), si ottiene $An^2 - n - 4 > 0$, che è verificata in particolare $\forall n > \frac{1+\sqrt{1+16A}}{2A}$, cioè definitivamente (a riprova che 1 non è solo il sup, ma anche il limite).