Analisi Matematica - Prova scritta del 19.01.2010

Soluzioni

1.

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{x}\lg|x-2| + \int \frac{dx}{x(x-2)} = -\frac{1}{x}\lg|x-2| + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\lg|x-2| + \frac{1}{2}\lg\left|\frac{x-2}{x}\right| + c = \varphi(x) + c$$

Poichè $\lg|x-2| \geq 0 \iff x \leq 1$ oppure $x \geq 3$, per l'area A richiesta si ha:

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{3/2} f(x)\,dx = 2\varphi(1) - \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) - \varphi\left(\tfrac{3}{2}\right).$$

L'integrale $\int_1^2 f(x)\,dx$ è improprio perchè la funzione diverge per $x \to 2$.
Per $x \to 2$ si ha $|f(x)| \sim \frac{|\lg|x-2||}{4} \leq \frac{1}{4|x-2|^{\alpha}}$ per ogni $\alpha > 0$; scelto per α un valore in $(0,1)$, il criterio permette di dedurre l'integrabilità della funzione.

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to 2}\varphi(x)\right) - \varphi(1) = -\frac{1}{2}\lg 2.$$

Infatti, per $x \to 2^-$ $\varphi(x) = \frac{(x-2)\lg(2-x)}{2x} - \frac{1}{2}\lg x \to -\frac{1}{2}\lg 2.$

2. C.E. $\mathbb{R}$

LIM per $x \to +\infty$ $f(x) \to -\infty$; $f(x) \sim -x+2$ e dunque $y = 2-x$ è asintoto

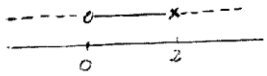
per $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$, $f(x) \sim 4e^{-x/4}$ e dunque non c'è asintoto

DRV $f'(x) = -e^{-x/4} + \operatorname{sgn}(2-x)$, per $x \neq 2$

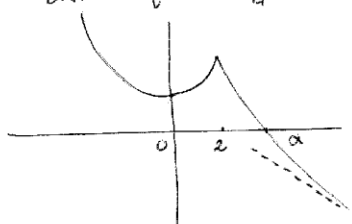
$x = 2$ punto angoloso

per $x > 2$, $f'(x) = -e^{-x/4} - 1 < 0$

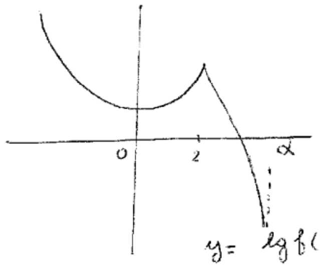
per $x < 2$, $f'(x) = -e^{-x/4} + 1 \geq 0$ per $x \geq 0$



DRV² $f''(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4} > 0$



$y = f(x)$



$y = \lg f(x)$

3.

$$\lg(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$
$$\operatorname{sen}(x+x^2) \sim x + x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) \sim \frac{-\frac{3}{4}x^2}{x^2} \to -\frac{3}{4}$$

4.

C.E. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

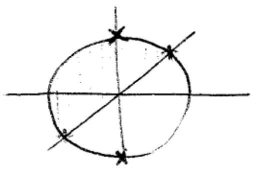
$$\frac{1-\cos^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x} < \frac{1-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{1-\cos x}{1-\operatorname{sen} x} \quad \frac{1+\cos x}{1+\operatorname{sen} x} < \frac{1-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$$

nel C.E. $\frac{1-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$ è sempre >0, eccetto se $\cos x = 1$ (valori di x che non soddisfano la disequazione)

$$\frac{1+\cos x}{1+\operatorname{sen} x} < 1$$

$\cos x < \operatorname{sen} x$



$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ $+ 2k\pi$.