Analisi Matematica

Prova scritta del 10. 09. 09

1. $f(x) = \lg\left(\sqrt{|x-1|} + x\right)$

C.E.

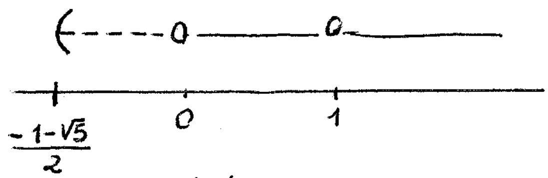
$\sqrt{|x-1|} > -x$

$x>0 \quad \vee \quad \begin{cases} x \le 0 \\ |x-1| > x^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x>0 \quad \vee \quad \begin{cases} x \le 0 \\ x^2+x-1<0 \end{cases}$

$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$

SGN.

$f(x) \geq 0 \iff \sqrt{|x-1|} \geq 1-x$



LIMITI

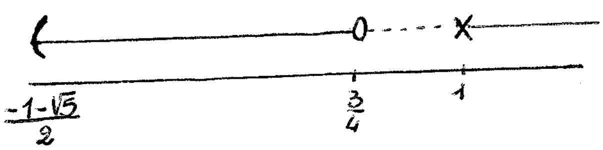
per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \lg x \to +\infty$ $\quad$ senza asintoto

per $x \to \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad f(x) \to -\infty$ $\quad$ asintoto verticale

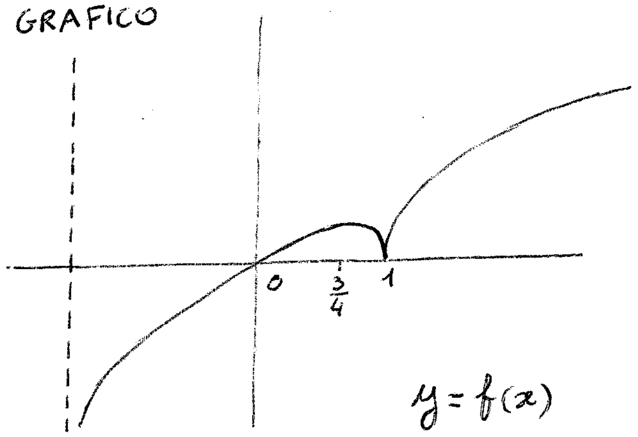
DRV

$f'(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{|x-1|}} \left(1 + \dfrac{\operatorname{sgn}(x-1)}{2\sqrt{|x-1|}} \right), \quad x \neq 1$

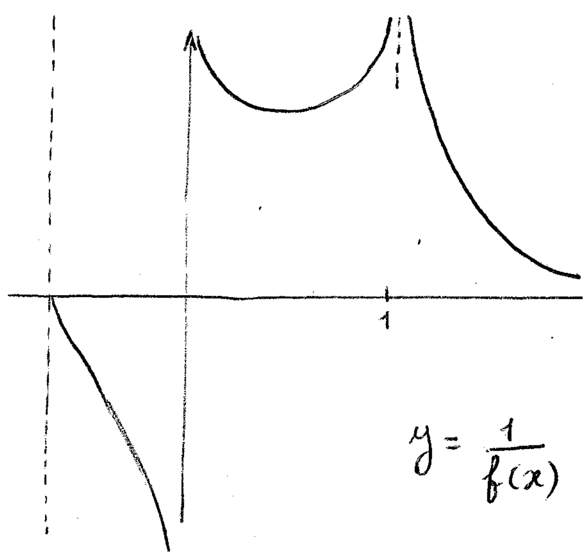
$x=1$ punto di cuspide



GRAFICO



$y = f(x)$



$y = \dfrac{1}{f(x)}$

2.

$$\text{media integrale} = \frac{1}{\lg 4 - \lg 2} \cdot \int_{\lg 2}^{\lg 4} \sqrt{\frac{e^x}{e^x - 1}}\, dx .$$

$\lg 4 - \lg 2 = \lg 2$

Per calcolare l'integrale, si pone

$$e^x = t \rightarrow x = \lg t, \quad dx = \frac{dt}{t}$$

ottenendo

$$\int_2^4 \sqrt{\frac{t}{t-1}}\, \frac{dt}{t} .$$

Ulteriormente, si pone

$$\sqrt{\frac{t}{t-1}} = z \longrightarrow t = \frac{z^2}{z^2-1}, \quad dt = -\frac{2z}{(z^2-1)^2}\, dz ,$$

ottenendo:

$$-2 \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}/3} \frac{dz}{z^2-1} = \left[\lg \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \right]_{\frac{2}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \ldots$$

3. Il polinomio caratteristico ha come radici $\pm 2i$; le soluzioni dell'eq. omogenea sono dunque della forma $A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$. Per trovare una soluzione particolare dell'eq. completa, passiamo in campo complesso: $z'' + 4z = x\, e^{2ix}$. Di questa eq. cerchiamo una soluzione della forma $\bar{z}(x) = x(Ax+B)e^{2ix}$ (perché $2i$ è radice). Sostituendo nell'eq. si trova che deve essere

$$\begin{cases} 8iA = 1 \\ A + 2iB = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -i/8 \\ B = 1/16 \end{cases}$$

Dunque:

$$\bar{z}(x) = \frac{x}{16}(1 - 2ix)(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$$

da cui

$$\bar{y}(x) = \frac{x}{16}(\operatorname{sen} 2x - 2x \cos 2x).$$

4.

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \sqrt{1+x^2} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 + o(x^4), \quad \operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$f(x) \sim \frac{x^4}{\frac{1}{3}x^4} \rightarrow 3 .$$