Soluzioni [1]

1. La funzione è 2π-periodica; possiamo dunque limitarne lo studio all'intervallo $[0, 2\pi]$

C.E. $[0, 2\pi] - \{ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \}$

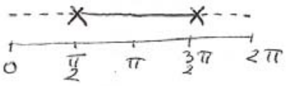
SGN sempre positiva

LIM per $x \to \pi/2$ $f(x) \to 0$ disc. eliminabile; poniamo $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

per $x \to 3\pi/2$ $f(x) \to +\infty$ as. verticale

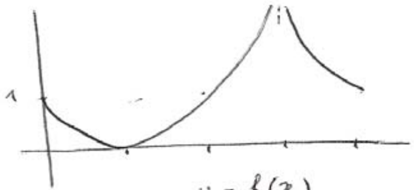
$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1.$

DRV $f'(x) = \dfrac{(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2)\operatorname{sgn} \cos x}{2|\cos x|^{3/2}}$

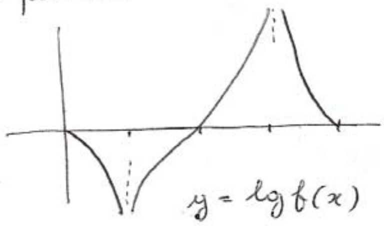


$f'(x) \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}$; dunque $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

DRV^2 $f''(x) = \dfrac{(1 - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen}^2 x + 2)}{2|\cos x|^{3/2}}$, sempre positiva



$y = f(x)$



$y = \lg f(x)$

2. CE. $x, y \in \mathbb{R}$

Separando le variabili e integrando:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{1+s^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{\lg(t^2 - 2t + 2)}{t^2}\, dt$$

$$\int \frac{\lg(t^2 - 2t + 2)}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t}\lg(t^2 - 2t + 2) + \int \frac{2(t-1)}{t(t^2 - 2t + 2)}\, dt$$

$$= -\frac{1}{t}\lg(t^2 - 2t + 2) + \int \left\{ -\frac{1}{t} + \frac{t}{t^2 - 2t + 2} \right\} dt$$

$$= -\frac{1}{t}\lg(t^2 - 2t + 2) - \lg|t| + \frac{1}{2}\int \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2}\, dt + \int \frac{dt}{(t-1)^2 + 1}$$

$$= -\frac{1}{t}\lg(t^2 - 2t + 2) - \lg|t| + \frac{1}{2}\lg(t^2 - 2t + 2) + \operatorname{arctg}(t-1) + c$$

$$\operatorname{arctg} y = -\frac{1}{x}\lg(x^2 - 2x + 2) + \lg\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{|x|} + \operatorname{arctg}(x - 1) + c$$

La condizione iniziale è verificata per $c = \pi/6$.

3. Per $x>0$ la serie è a segni alterni; per $x<0$ è positiva; per $x=0$ non è definita.

$$|a_n| = \frac{|n+x|}{|x|^n} \sim \frac{n}{|x|^n}$$

Criterio radice: $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{|x|}$.

Dunque:

per $x>1$ o $x<-1$ la serie converge

per $-1<x<1$ $(x \neq 0)$ la serie non converge.

Per $x=1$, $\sum\limits_n (-1)^n (n+1)$ indeterminata

per $x=-1$, $\sum\limits_n (n-1)$ divergente.

4. Poniamo $t = \frac{1}{x} \to 0^+$; la funzione diventa:

$$\frac{e^{-1} - e^{-\lg(1+t)/t}}{t};$$

poichè

$$\lg(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$-\frac{\lg(1+t)}{t} = -1 + \frac{t}{2} + o(t)$$

$$e^{-1+\frac{t}{2}+o(t)} = e^{-1}\, e^{\frac{t}{2}+o(t)} = e^{-1}\left(1+\frac{t}{2}+o(t)\right).$$

Sostituendo, si trova

$$\frac{e^{-1} - e^{-1}\left(1+\frac{1}{2}t + o(t)\right)}{t} \to -\frac{1}{2e}.$$