Analisi Matematica - Corsi A , B , R

Soluzioni della prova scritta del 29.01.2008

1.

C.E. $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \iff x \in R$

SGN Non si può stabilire per via algebrica

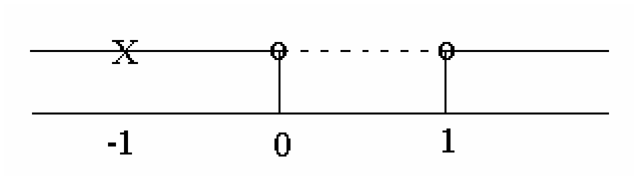
LIM

per $x \to +\infty$ $f(x) \sim x \to +\infty$, $f(x) - x \to -\infty$ non c'è asintoto

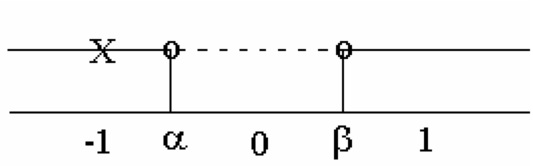
per $x \to -\infty$ $f(x) \sim x \to -\infty$, $f(x) - x \to -\infty$ non c'è asintoto

per $x \to -1^{\pm}$ $f(x) \to -1 \mp \pi/2$ disc.di I specie (o salto finito)

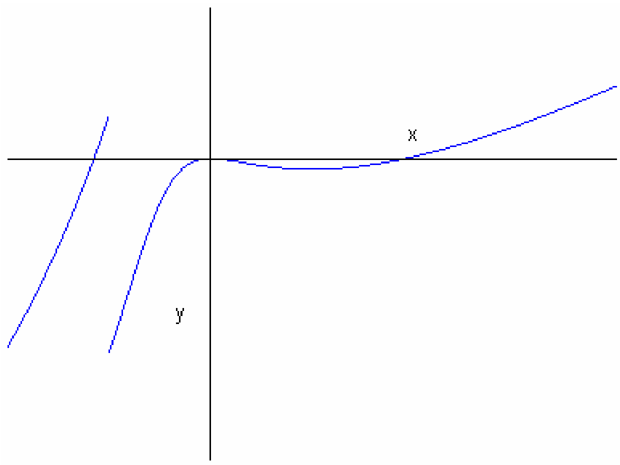
DRV $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{2x^2 + 2x + 1}$



DRV^2 $f''(x) = \dfrac{2(4x^2 + 2x - 1)}{2x^2 + 2x + 1}$



GRAFICO



2.

Il denominatore della funzione si annulla per x = 0 e per x = 1 ; l'integrale è improprio perché la funzione tende all'infinito quando x tende all'uno o all'altro degli estremi di integrazione.

Procedendo come indicato nel testo, calcoliamo le primitive della funzione integrando : ponendo

$$\sqrt[6]{x} = t \quad \text{e dunque} \quad x = t^6 \ , \ dx = 6\, t^5\, dt$$

e semplificando opportunamente , si ottiene

$$6 \int \frac{t^2}{t-1}\, dt = 6 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1}\, dt = 6 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$= 6 \left(\frac{t^2}{2} + t + \log \left| t - 1 \right| \right) + c =$$

$$= 6 \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \log \left| \sqrt[6]{x} - 1 \right| \right) + c \ .$$

Le primitive per $x \to 1$ tendono a $-\infty$ (mentre per $x = 0$ valgono c) : questo significa che l'integrale dato non esiste.

Per ritrovare questo risultato , studiamo il modo in cui la funzione tende all'infinito per $x \to 1$ e per $x \to 0$.

Per $x \to 0$ si ha $f(x) \sim -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; la funzione è un infinito di ordine ½ e dunque in un intorno di 0 l'integrale esiste .

Per studiare il comportamento per $x \to 1$, poniamo $x - 1 = t \to 0^-$; per il denominatore si ottiene $(1+t)^{2/3} - (1+t)^{1/2} \approx (1 + 2t/3) - (1 + t/2) = t/6$. La funzione è dunque un infinito di ordine 1 e perciò in ogni intorno del punto 1 (in particolare nell'intervallo (0 , 1) dato) l'integrale non esiste.

3.

$$\log(1 + x + x^2/2) \approx (x + x^2/2) - (x^2 + x^3)/2 + (x^3)/3 + o(x^3) = x - x^3/6 + o(x^3)$$

$$x \log(1 + x + x^2/2) \approx x^2 - x^4/6 + o(x^4)$$

$$\text{sen}(x^2) \approx x^2 + o(x^4) \qquad\qquad x\, \text{tg}(x^3) \approx x^4 + o(x^4)$$

Il rapporto è dunque approssimato con $\dfrac{-x^4/6}{x^4}$; il limite vale $-1/6$.

4.

Poiché $\dfrac{e^n + 1}{e^n - 1} \to 1$, si ha $a_n \approx \dfrac{e^n + 1}{e^n - 1} - 1 = \dfrac{2}{e^n - 1} \approx \dfrac{2}{e^n}$.

La serie data ha lo stesso comportamento della serie geometrica di ragione 1 / e, dunque converge.