

1. (punti 9)

- Studiare le principali proprietà della funzione

$$f(x) = \frac{\log |x|}{\sqrt[3]{x}}$$

(compreso lo studio della derivata seconda) e tracciarne il grafico.

- Dal grafico ottenuto dedurre il più piccolo valore della costante  $c$  tale che risulti

$$\log x \leq c \sqrt[3]{x} \quad \forall x > 0.$$

2. (punti 9)

Sia  $f(x) = \frac{\sqrt{4+x} - 3}{4 - \sqrt{4+x}}$ .

- Calcolare

$$\int_0^{12} f(x) dx.$$

- Ritrovare il risultato precedente usando un opportuno criterio per gli integrali impropri.
- Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse per  $0 \leq x \leq 6$ .

3. (punti 6)

Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 5y = xe^x$$

con le condizioni iniziali  $y(0) = y'(0) = 0$ .

4. (punti 6)

Dopo avere scritto in forma trigonometrica o esponenziale i numeri complessi

$$\alpha = \sqrt{3} - i, \quad \beta = \frac{2+i}{2i-1} - 1$$

risolvere l'equazione  $\alpha^2 z^6 = \beta$ .

*Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.*