Soluzioni della prova scritta del 13 settembre 2007

1.

$$\text{Per } n \to +\infty \quad x_n = 1 - \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) e^{-1/n} \sim 1 - \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= \frac{1-\alpha}{n} + \frac{\alpha - 1/2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

L'approssimazione di Taylor prova che la successione è un infinitesimo di ordine 1 per $\alpha \neq 1$ di ordine 2 se $\alpha = 1$ e quindi la condizione necessaria per la convergenza della serie associata è sempre verificata ; con il criterio di equivalenza possiamo concludere che nel primo caso la serie diverge , nel secondo converge.

2.

Il polinomio caratteristico associato all'equazione è dato da $k^2 - 4k + 4$ ed ha come unica radice (con molteplicità 2) il valore $k = 2$. L'integrale dell'equazione omogenea si scrive dunque nella forma $y_0(x) = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$.
Il termine noto dell'equazione è il prodotto di un polinomio di primo grado per un esponenziale il cui coefficiente è la radice del polinomio caratteristico : una soluzione particolare è dunque della forma $y_f(x) = x^2 (A + Bx) e^{2x}$. Sostituendo nell'equazione e svolgendo i calcoli, si trova che deve essere $A = 1/3$, $B = 0$.
L'integrale generale dell'equazione è dunque dato da $y(x) = (c_1 + c_2 x + x^3/3) e^{2x}$.
Imponendo le condizioni iniziali , si trova che deve essere $c_1 = 2$, $c_2 = -3$. La soluzione del problema dato è dunque $y_C(x) = (2 - 3x + x^3/3) e^{2x}$.

3.

L'integrale esiste perchè la funzione nell'intervallo dato è continua; inoltre , essendo una funzione dispari , il suo integrale esteso ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine vale 0.
L'area richiesta è invece data dall'integrale

$$\int_{-\sqrt[3]{\pi/2}}^{\sqrt[3]{\pi/2}} \left| x^5 \cos x^3 \right| dx = 2 \int_0^{\sqrt[3]{\pi/2}} x^5 \left| \cos x^3 \right| dx .$$

(L'uguaglianza è dovuta al fatto che la funzione da integrare stavolta è pari) .
Nell'intervallo dato la funzione coseno è positiva , perché $0 < x^3 < \pi / 2$: possiamo dunque togliere il valore assoluto.
Ponendo $t = x^3$, $dt = 3x^2 dx$, l'integrale diventa

$$\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} t \cos t \; dt$$

Integrando per parti :

$$\frac{2}{3}\left\{ [\![\, t \operatorname{sen} t \,]\!]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \; dt \right\} = \frac{2}{3}\, [\![\, t \operatorname{sen} t + \cos t \,]\!]_0^{\pi/2} = \frac{\pi - 2}{3} .$$

4.

La funzione è dispari e dunque basta studiarla per $x \geq 0$. I calcoli che seguono si riferiscono a questa scelta.

C.E. $\quad x \neq 0 \; , \quad x \neq \sqrt{e}$

SGN $\quad$ Positiva per $0 < x < 1$ e per $x > \sqrt{e}$, negativa per $1 < x < \sqrt{e}$, nulla per $x = 1$

LIM $\quad$ per $x \to 0 \qquad f(x) \sim \dfrac{x \log x}{2 \log x} = \dfrac{x}{2} \to 0$

punto di discontinuità eliminabile

per $x \to \sqrt{e}^{\,\pm} \qquad f(x) \to \pm\infty$

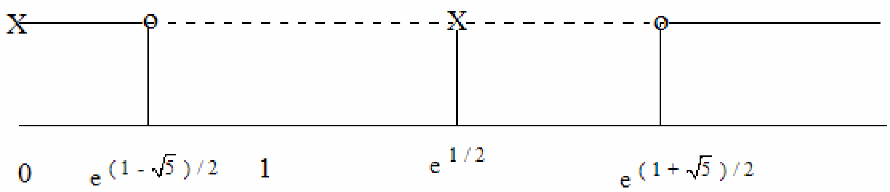
asintoto verticale

per $x \to +\infty \qquad f(x) \sim \dfrac{x \log x}{2 \log x} = \dfrac{x}{2} \to +\infty$

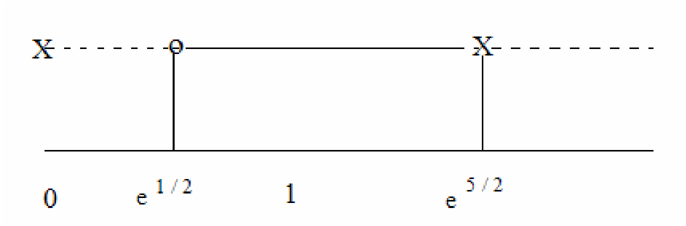
$$f(x) - x/2 = \frac{x}{2\,(2 \log x - 1)} \to +\infty$$

senza asintoto

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{2 \log^2 x - \log x - 1}{(2 \log x - 1)^2}$



DRV2 $$f''(x) = -\frac{4\log^2 x - 12\log x + 5}{x(2\log x - 1)^4}$$



GRAFICO