Soluzioni

1.

La funzione è 2π - periodica; basta dunque studiarla in un intervallo di ampiezza il periodo, ad esempio in $[\,0\,,\ 2\pi\,]$. I calcoli che seguono si riferiscono a questa scelta.

C.E. $\quad [\,0\,,\,2\,\pi\,] - \{\,\pi/2\,,\,3\,\pi/2\,\}$

SGN $\quad$ Sempre positiva

LIM $\quad$ per $x \to \pi/2 \quad f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{|\cos x|\,(1+\operatorname{sen} x)}} = \dfrac{|\cos x|^{3/2}}{1+\operatorname{sen} x} \to 0$

punto di discontinuità eliminabile

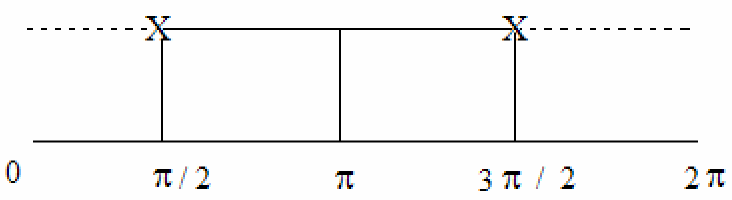
per $x \to 3\pi/2 \quad f(x) \to +\infty$

asintoto verticale

$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1$

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2}{2\,|\cos x|^{3/2}}\ \operatorname{sgn}(\cos x)$

Il numeratore è positivo se senx < -2 oppure senx > 1 ; poiché entrambe le condizioni non sono mai verificate , il segno della derivata è l'opposto di quello del coseno.



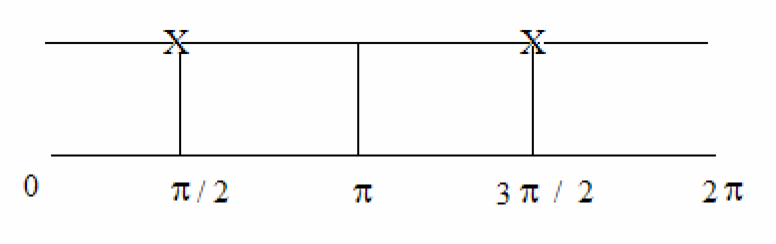
Per $x \to \pi/2^{\pm} \quad f'(x) = \pm\dfrac{(\operatorname{sen}x - 1)(\operatorname{sen}x + 2)}{2\,|\cos x|^{3/2}} \approx$

$$\approx \mp \frac{3}{2} \frac{(1 - \operatorname{sen}x)(1 + \operatorname{sen}x)}{|\cos x|^{3/2} (1 + \operatorname{sen}x)} \approx$$

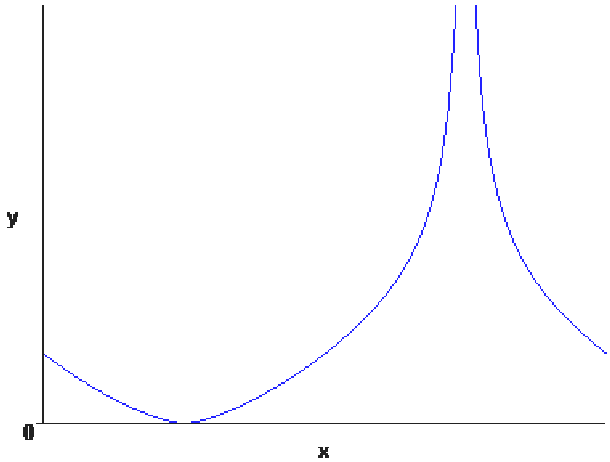
$$\approx \mp \frac{3}{4} |\cos x|^{1/2} \to 0$$

punto a tangente orizzontale

DRV^2 $\qquad f''(x) = \dfrac{(1 - \operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}^2 x - 2)}{4 |\cos x|}$



GRAFICO



2.

Si pone $\sqrt{x+2} = t$, $x = t^2 - 2$, $dx = 2t\,dt$, ottenendo

$$\int \frac{2t}{t^2 + t - 2} dt = \frac{2}{3} \int \left(\frac{2}{t+2} + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{2}{3} \log \frac{(t+2)^2}{|t-1|} + c =$$

$$= \frac{2}{3} \log \frac{(\sqrt{x+2}+2)^2}{\left|\sqrt{x+2}-1\right|} + c \ .$$

Poiché per $x \to -1^+$ le primitive tendono a $-\infty$, l'integrale nell'intervallo assegnato non esiste.
Allo stesso risultato saremmo arrivati usando un criterio a priori. Infatti , studiamo il comportamento della funzione data per $x \to -1^+$; posto $x + 1 = t \to 0^+$, si ha :

$$\frac{1}{t - 1 + \sqrt{t+1}} \approx \frac{2}{3\,t} \ .$$

La funzione è dunque infinita di ordine 1 e questo assicura che l'integrale tra -1 e non esiste.

3.

Si utilizza la rappresentazione esponenziale (o trigonometrica) dei numeri complessi, ottenendo successivamente :

$$z = r\,e^{i\theta} \qquad i\,z = r\,e^{i(\theta+\pi/2)} \qquad (i\,z)^6 = r^6\,e^{i(6\theta+3\pi)} = r^6\,e^{i(6\theta+\pi)}$$

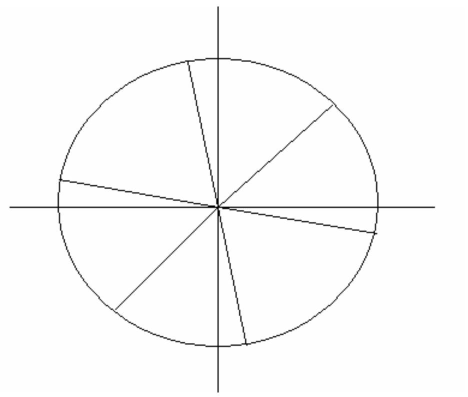
$$1 + i = \sqrt{2}\ e^{i\,\pi/4} \qquad (1+i)^2 = 2\,e^{i\,\pi/2} \qquad 4\,|z^4|(1+i)^2 = 8\,r^4\ e^{i\,\pi/2}$$

L'equazione è verificata se :

1. $r^6 = r^4$, che fornisce $r = 0$ (cioè $z = 0$) oppure $r = 2\sqrt{2}$

2. $6\theta + \pi = \pi/2 + 2\,k\,\pi$ cioè $\theta = -\pi/12 + k\,\pi/3$

Oltre alla soluzione nulla si trovano dunque altre 6 soluzioni che si rappresentano come vertici di un esagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $2\sqrt{2}$:



Tenendo anche conto del fatto che per le formule di bisezione si ha

$$\cos \pi/12 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{sen}\, \pi/12 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

le soluzioni non nulle sono date da

$$z_0 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/12} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 2(1+i)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\,7\pi/12} = \sqrt{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$z_4 = 2\sqrt{2}\, e^{i\,11\pi/12} = -z_1$$

$$z_5 = 2\sqrt{2}\, e^{i\,5\pi/4} = -z_2$$

$$z_6 = 2\sqrt{2}\, e^{i\,19\pi/12} = -z_3$$

4.

$$|a_n| = \frac{\log(2+3^n)}{2^n}\,|x|^n \approx \frac{n\log 3}{2^n}\,|x|^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{n\log 3}{2^n}\,|x|^n} \to \frac{|x|}{2}$$

Dunque per $|x| < 2$ la serie converge , per $|x| > 2$ non converge.
Da un esame diretto si ottiene che la serie non converge nemmeno per $x = \pm 2$ (in entrambi i casi non è verificata la condizione necessaria) .